

GEOMETRIA ANALITICA NELLO SPAZIO ($\mathbb{R}^3$ o più in gener. $\mathbb{R}^n$)

Spazio $\mathbb{R}^n$: p.ti (o vettori) sono n-uple $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Operazioni: $\rightarrow$ somma di vettori

$\rightarrow$ prodotto di un vettore per un numero

$\rightarrow$ prodotto scalare tra 2 vettori

$\rightarrow$ norma di un vettore

$\rightarrow$ distanza tra vettori (p.ti)

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

Dato $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$

$$\text{Prodotto scalare} = \underbrace{\vec{x} \cdot \vec{y}}_{\text{INPUT: 2 vettori}} = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \underbrace{x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n}_{\text{OUTPUT: numero}}$$

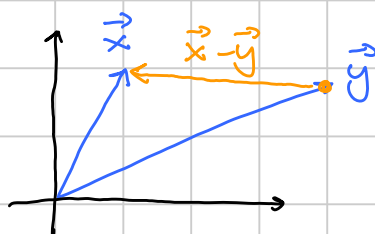
$$\begin{aligned} \text{Norma di } \vec{x} &= \text{"lunghezza di } \vec{x} \text{"} = \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \\ &= \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} \end{aligned}$$

$$\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

$$= \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

$$= \|\vec{y} - \vec{x}\|$$

$\uparrow$ teorema di Pitagora
in $\mathbb{R}^n$



Significato geometrico del prodotto scalare

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos \theta$$

↑
angolo compreso tra i vettori

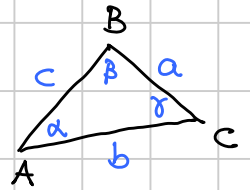
I vettori $\vec{x}$ e $\vec{y}$ sono perpendicolari $\Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$

Esempio In $\mathbb{R}^3$ il triangolo con vertici in $\underbrace{(0,0,0)}_A, \underbrace{(1,2,3)}_B, \underbrace{(-1,3,5)}_C$

Lunghezze dei lati:

$$AB = \|B-A\| = \|(1,2,3)\| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$
$$BC = \|C-B\| = \|(-2,1,2)\| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$$
$$AC = \|C-A\| = \|(-1,3,5)\| = \sqrt{1+9+25} = \sqrt{35}$$

Area del triangolo: uso formula trigonometrica



$$\text{Area} = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = \frac{1}{2} ca \sin \beta$$

Nel vostro caso: $\text{Area} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha$

↑ ↑
b so b so

Mi procuro $\cos \alpha$

$$\begin{aligned} \langle (1,2,3), (-1,3,5) \rangle &= AB \cdot AC \cdot \cos \alpha \\ &= -1 + 6 + 15 \\ &= 20 \end{aligned}$$
$$= \sqrt{14} \cdot \sqrt{35} \cdot \cos \alpha$$

$$\text{Quindi } \cos \alpha = \frac{20}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{35}} = \frac{20}{\sqrt{2} \sqrt{7} \sqrt{5} \sqrt{7}} = \frac{20}{7\sqrt{10}}$$

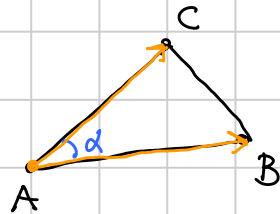
$$\text{Ora } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{400}{49 \cdot 10}} = \sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{3}{7}$$

$$\text{In conclusione area} = \frac{1}{2} \sqrt{14} \cdot \sqrt{35} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{7} \sqrt{5} \sqrt{7} \frac{3}{7} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

— 0 — 0 —

Esempio 2 $A = (1, 0, -1)$ $B = (2, 1, 1)$ $C = (3, 0, 1)$

Come calcolo il coseno dell'angolo in A?



$$\langle B-A, C-A \rangle = \|B-A\| \cdot \|C-A\| \cdot \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \langle (1, 1, 2), (2, 0, 2) \rangle &= \|(1, 1, 2)\| \cdot \|(2, 0, 2)\| \cdot \cos \alpha \\ 2+0+4 &= \sqrt{6} \cdot \sqrt{8} \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } \cos \alpha = \frac{6}{\sqrt{6} \sqrt{8}} = \frac{6}{\sqrt{2} \sqrt{3} 2 \sqrt{2}} = \frac{6}{4 \sqrt{3}} = \frac{3}{2 \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Che cosa rappresenta in $\mathbb{R}^3$ l'insieme dei p.ti $t(1, 2, 5)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$?

È la retta che passa per l'origine e va nella direzione $(1, 2, 5)$

In generale, l'equazione parametrica di una retta in $\mathbb{R}^3$ è del tipo

$$\vec{P}_0 + t \vec{U}$$

$\uparrow$ vettore che indica la posizione al tempo $t=0$
 $\leftarrow$ vettore "velocità" che indica direzione e verso

Esempi $(2, 5, 7) + t(1, 3, -4)$

MUTUA POSIZIONE DI 2 RETTE

In $\mathbb{R}^2$ due rette possono essere

→ coincidenti, cioè sono la stessa retta

∞ intersezioni

→ parallele ma non coincidenti

Nessuna intersezione

→ incidenti (si intersecano)

1 intersezione

Come me ne accorgo dalle equazioni?

① Nella forma $ax+by+c=0$ e $\hat{a}x+\hat{b}y+\hat{c}=0$ sono

→ coincidenti se (a,b,c) è multiplo di $(\hat{a},\hat{b},\hat{c})$

→ parallele ma non coincidenti se (a,b) è multiplo di $(\hat{a},\hat{b})$ ma non da tenera come sopra

→ incidenti se (a,b) non è multiplo di $(\hat{a},\hat{b})$

Esempio

$$3x-2y+5=0$$

$$6x-4y+10=0 \text{ coincidente}$$

$$-3x+2y+7=0 \text{ parallela}$$

$$(3,-2) \quad (-3,2)$$

$$3x+2y+5=0 \text{ incidenti}$$

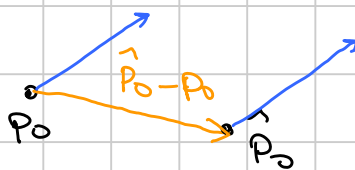
Se sono incidenti trovo l'intersezione risolvendo il sistema

② In forma parametrica P_0+tV e $\hat{P}_0+t\hat{V}$ sono

→ incidenti se V e $\hat{V}$ non sono multipli l'uno dell'altro

→ parallele se V è multiplo di $\hat{V}$ e V non è multiplo di $\hat{P}_0-P_0$

→ coincidenti se V è multiplo di $\hat{V}$ e multiplo anche di $\hat{P}_0-P_0$



Esempi

$$\underbrace{(1,2)}_{P_0} + t(3,4)$$

$$(1,7) + t(3,5) \text{ incidenti}$$

$$\underbrace{(2,5)}_{\hat{P}_0} + t(6,8)$$

↑ velocità multipla,
quindi // o coinc.

$\hat{P}_0 - P_0 = (1,3)$ non è multiplo della velocità, quindi sono parallele.

In $\mathbb{R}^3$ due rette possono essere

- coincidenti (stessa retta)
- parallele (nessuna intersezione, ma nello stesso piano)
- incidenti (una intersezione)
- sghembe (nessuna intersezione, ma non nello stesso piano)



Come riconosco ?

vettori velocità multipli tra di loro

- ↗ parallele (0 inters.)
- ↘ coincidenti (∞ inters.)

vettori velocità non multipli tra di loro

- ↗ incidenti (1 inters.)
- ↘ sghembe (0 inters.)