

Matrice associata ad un sistema lineare

Matrice dei coeff.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

Posso operare alla Gauss direttamente sui soli coefficienti

Matrice completa del sistema

- scambiare righe
- $(R_i, R_j) \rightsquigarrow (R_i, aR_j + bR_i)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 11 \end{array} \right)$$

Da qui se torno in forma di sistema posso risolvere

$$\begin{cases} 1x - 2y + z = 1 \\ 3y - 2z = -1 \\ 7z = 11 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= 2y - z + 1 = \frac{10}{7} - \frac{11}{7} + 1 = \dots \\ 3y &= 2z - 1 = \frac{22}{7} - 1 = \frac{15}{7} \quad y = \frac{5}{7} \\ &\rightarrow z = \frac{11}{7} \end{aligned}$$

Siamo arrivati ad una MATRICE A SCALA, in cui tutte le righe sono del tipo

PIVOT

0 0 ... 0 * * * * *

zeri iniziali, che nella prima riga possono non esserci

elemento diverso da 0

altra rida, = 0 diversa da 0

In ogni riga c'è almeno uno zero iniziale in più rispetto alla riga precedente

Una volta ridotto a scala, un sistema risulta

- IMPOSSIBILE se c'è una riga con tutto 0, tranne il termine più a destra $0 \ 0 \ \dots \ 0 \ | \ \begin{matrix} \neq 0 \\ \text{⊗} \end{matrix}$

- con SOLUZIONE UNICA se su tutte le colonne della matrice dei coefficienti c'è un PIVOT.
- con INFINITE SOLUZIONI se ci sono colonne nella matrice dei coeff. che non contengono PIVOT. In tal caso l'insieme delle soluz. dipende da un numero di parametri liberi uguale al numero di colonne senza pivot.

Esempio 1
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ -x + 2y + z = 3 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline \textcircled{1} & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \textcircled{4} & 7 \end{array}$$

Seconda colonna senza pivot, quindi il sistema ha infinite soluzioni che dipendono da un parametro

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 4z = 7 \end{cases}$$

$$z = \frac{7}{4}$$

$$y = t$$

$$x = 2y - 3z + 4 = 2t - \frac{21}{4} + 4 = 2t - \frac{5}{4}$$

Soluzione generale: $(x, y, z) = \left(2t - \frac{5}{4}, t, \frac{7}{4} \right)$

↑
il parametro libero sta nella variabile corrisp. alla colonna senza pivot

Esempio 2
$$\left(\begin{array}{cccc|c} \textcircled{3} & 0 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & \textcircled{3} & 0 & 4 \end{array} \right)$$

$$3x + 2z + 5w = -1$$

$$3z = 4$$

2 colonne senza pivot $\Rightarrow$ 2 parametri liberi $\Rightarrow$ posso metterli su y e w

$$\begin{aligned} w = t, \quad z = \frac{4}{3}, \quad y = s, \quad 3x &= -2z - 5w - 1 = -\frac{8}{3} - 5t - 1 \\ &= -\frac{11}{3} - 5t \end{aligned}$$

La soluzione generale è

$$(x, y, z, w) = \left(-\frac{11}{3} - \frac{5}{3}t, s, \frac{4}{3}, t\right) \\ = \left(-\frac{11}{3}, 0, \frac{4}{3}, 0\right) + t\left(-\frac{5}{3}, 0, 0, 1\right) + s(0, 1, 0, 0)$$

Esempio 3

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + y + z = 5 \\ 4x + 4y + 3z = 18 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & 3 & 18 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \leadsto x + y - z = 1 \\ \leadsto 2z = 4 \end{array}$$

Due pivot; sol. infinite con parametro libero sulla y

$$y = t, \quad z = 2, \quad x = -y + z + 1 = -t + 3$$

Soluz. generale: $(x, y, z) = (-t + 3, t, 2) = \boxed{(3, 0, 2)} + t \boxed{(-1, 1, 0)}$

— 0 — 0 —

↑
Deve risolvere
il sistema

↑
sostituito nelle
equ. del sistema
fa venire 0
su tutte le
righe.

Variante di JORDAN all'algoritmo

Una volta ridotta a scala la matrice, si può continuare facendo venire 0 sopra i pivot.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 0 & 2 & 3 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \textcircled{-3} & -2 \end{array} \right)$$

A questo p.to ho sol. unica (ogni colonna ha 1 PIVOT)

Continuazione alla JORDAN per mettere 0 sopra i PIVOT

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Se qui non veniva $\neq 0$, potevo lavorare con la 2^a per farlo venire

Alla fine si trova una matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Forma alla jordan, da cui si trovano ancora più in fretta le soluzioni

— 0 — 0 —