

SISTEMI LINEARI

$$2x + 3y + 5z = 4$$

$$y + 2z = 5$$

$$6x + y - z = 3$$

Esempio di sistema
lineare

Un sistema lineare è un sistema in cui tutte le equazioni si presentano nella forma

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = b$$

combinazione lineare delle
incognite

$x_1, \dots, x_n$ incognite

$c_1, \dots, c_n$ sono numeri dati
detti coefficienti

b si dice termine noto

Un sistema lineare si dice

- omogeneo se tutte le sue equazioni hanno termine noto $= 0$
- non omogeneo se almeno un'equazione del sistema ha $b \neq 0$.

Oss. In generale un sistema può avere m equazioni in n incognite, anche con $m \neq n$.

Esempio 1

$$\begin{cases} x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

$x = -3y - 2$ sostituisco nella 2^a

$$-6y - 4 - y = 3, \quad -7y = 7, \quad y = -1$$

Torno nella 1^a: $x = 1$

Il sistema ha soluzione unica $(x, y) = (1, -1)$.

VERIFICA $\sim$ OK

Esempio 2

$$\begin{cases} x + 3y = -4 \\ 2x + 6y = 5 \end{cases}$$

$$x = -3y - 4$$

$$-6y - 8 + 6y = 5 \quad -8 = 5$$

Il sistema è impossibile, cioè non ci sono soluzioni.

Si poteva vedere da subito: a sx della 2^a equaz. c'è 2 volte la prima, ma il termine noto (5) non è 2 volte -4.

Esempio 3

$$\begin{cases} 2x - y = 2 \\ -4x + 2y = -4 \end{cases}$$

$$y = 2x - 2$$

$$\cancel{-4x} + \cancel{4x} - 4 = -4 \quad -4 = -4$$

Quindi la 2ª equ. è sempre soddisfatta purché lo sia la 1ª.

In questo caso il sistema ha infinita soluzioni, che sono tutte le coppie (x, y) con $y = 2x - 2$.

Volendo sono tutte le coppie del tipo $(t, 2t - 2)$ al variare del parametro libero t

$$t = 5 \rightsquigarrow (5, 8) \quad \text{verifica ok}$$

$$t = 3 \rightsquigarrow (3, 4) \quad \sim \quad \sim$$

— o — o —

↓
 $t(1, 2) + (0, -2)$
eq. parametrica di una retta.

FATTO GENERALE Dato un sistema lineare, ci sono tre possibilità

- ① il sistema ha soluzione unica
- ② il sistema non ha soluzioni
- ③ il sistema ha infinite soluzioni e l'insieme di tutte le soluzioni dipende da un certo numero di parametri liberi.

— o — o —

Esempio 4 $3x + 2y + 4z = 5$ (1 equazione in 3 incognite)

Ad esempio posso ricavare x :

$$x = \frac{1}{3}(5 - 2y - 4z) = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}y - \frac{4}{3}z$$

Quindi posso scrivere la sol. generale nella forma

$$\left(\underbrace{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}t - \frac{4}{3}s}_{\substack{\text{"} \\ x}}, \overset{\uparrow}{t}, \overset{\uparrow}{s} \right) =$$

$$= \left(\frac{5}{3}, 0, 0 \right) + t \left(-\frac{2}{3}, 1, 0 \right) + s \left(-\frac{4}{3}, 0, 1 \right) \quad (s \text{ e } t \text{ sono i 2 parametri liberi})$$

Oss. Posso dare i valori liberi a 2 qualunque variabili e ricavare la restante di conseguenza.

ALGORITMO DI GAUSS

(o GAUSS - JORDAN)

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

ricopio

$$2^a - 2 \cdot 1^a$$

$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ -7y = -3 \end{cases}$$

In questo modo ho eliminato la x dalla 2^a

Da questa forma posso risolvere: $y = \frac{3}{7}$, $x = -3y + 4 = -\frac{9}{7} + 4 = \frac{19}{7}$

Il sistema ha sol. unica $(x, y) = \left(\frac{19}{7}, \frac{3}{7}\right)$ VERIFICA OK

secondo esempio:

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y = 3 \\ 3x - y + 2z = 4 \end{cases}$$

ricopio

$$(2^a - 2 \cdot 1^a)$$

$$(3^a - 3 \cdot 1^a)$$

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ -3y + 2z = -1 \\ -4y + 5z = -2 \end{cases}$$

ricopio

ricopio

$$(3 \cdot 3^a - 4 \cdot 2^a)$$

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ -3y + 2z = -1 \\ 7z = -2 \end{cases}$$

ricavo x

$$\begin{aligned} -3y - \frac{4}{7} &= -1 \rightarrow \text{ricavo } y \\ z &= -\frac{2}{7} \end{aligned}$$

Terzo esempio

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \quad (2^a - 2 \cdot 1^a) \quad \begin{cases} x + y - z = 2 \\ -y + 2z = -1 \end{cases}$$

Sulla 2^a equazione ho un parametro libero, che posso fissare a piacere

$$z = t, \quad y = 2z + 1 = 2t + 1, \quad x = 2 - y + z = 2 - (2t + 1) + t = 1 - t$$

La soluzione generale è $(1 - t, 2t + 1, t) = (1, 1, 0) + t(-1, 2, 1)$

Verifica: 1^a eq. $(1 - t) + (2t + 1) - t = 2$ OK

2^a eq. $2(1 - t) + (2t + 1) = 3$ OK

— 0 — 0 —

L'algoritmo consiste nel trasformare il sistema in uno più semplice che abbia le stesse soluzioni,

Le operazioni consentite sono

① Scambiare fra di loro 2 righe

② Sostituire una riga R_j con $a R_j + b R_i$ purché

• algoritmo ultraortodosso : $a = 1$

• algoritmo standard : $a \neq 0$

Esempio Se ho
$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 5x - 3y &= 2 \end{aligned}$$

Ultraortodosso : $\boxed{2^a} - \frac{5}{2} \cdot 1^a$

Standard : $\boxed{2} \cdot 2^a - 5 \cdot 1^a$

Oss. le operazioni conducono ad un sistema con le stesse soluzioni.

[Dim. $\begin{cases} R_i = 0 \\ R_j = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} R_i = 0 \\ a R_j + b R_i = 0 \end{cases}$ se è vero il 1°, è vero il 2°]

$$\begin{cases} R_i = 0 \\ \boxed{a R_j + b R_i} = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} R_i = 0 \\ R_j = 0 \end{cases}$$

↓ se questo è nullo e $R_i = 0$, allora anche $a R_j = 0$,
ma essendo $a \neq 0$ posso concludere che $R_j = 0$

— 0 — 0 —

L'obiettivo finale dell'algoritmo è arrivare ad un sistema A SCALA, cioè un sistema in cui ogni equazione ha una incognita (almeno) in meno della precedente.

Questi sistemi si risolvono "dal basso",

— 0 — 0 —