

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 03

Titolo nota

01/10/2014

GEOMETRIA NEL PIANO

EQUAZIONE DELLA RETTA

Forma cartesiana

- esplicita $y = mx + n$ oppure $x = x_0$
- implicita $ax + by + c = 0$

Implicita

PRO: tutte le rette hanno equ. di quel tipo

CONTRO: • non tutte le terne a, b, c determinano una retta (senza $a^2 + b^2 > 0$)

• due terne a, b, c che sono una multipla dell'altra danno la stessa retta

Esplicita

PRO: • due rette sono la stessa se e solo se hanno lo stesso m e lo stesso n

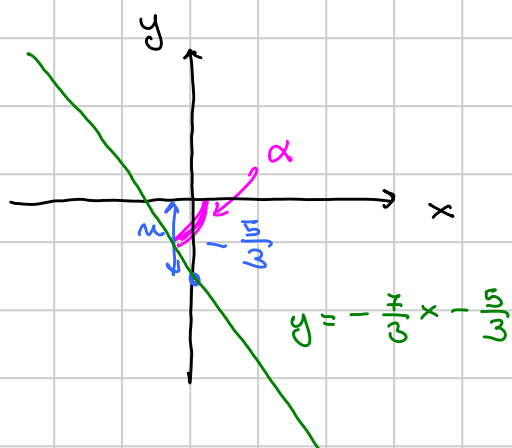
• m ed n hanno significato geom. evidente

CONTRO: due formule diverse in 2 casi diversi.

Esempi

$$7x + 3y + 5 = 0$$

$$y = \underbrace{-\frac{7}{3}}_m x - \underbrace{\frac{5}{3}}_n$$

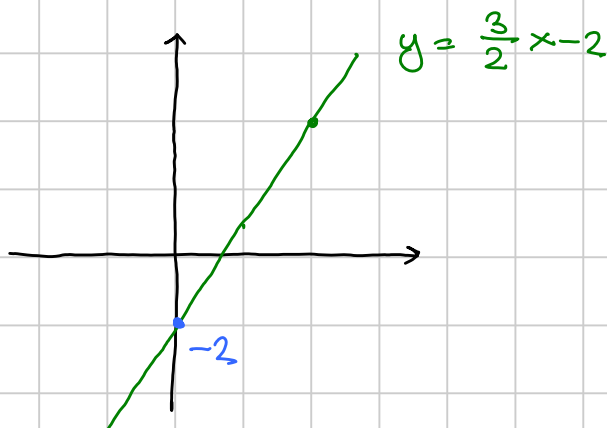


$$-\frac{7}{3} = \text{coeff. ang.} = \tan \alpha$$

$$3x - 2y - 4 = 0$$

$$y = \boxed{\frac{3}{2}}x - 2$$

2 quadretti a dx
3 quadretti in su



Forma parametrica

$$(a,b) + t(c,d) \text{ oppure } (a+tc, b+td)$$

Penso t come un parametro "temporale" e l'espressione descrive il percorso di un smino.

Esempio $(-1, -2) + t(3, 1)$

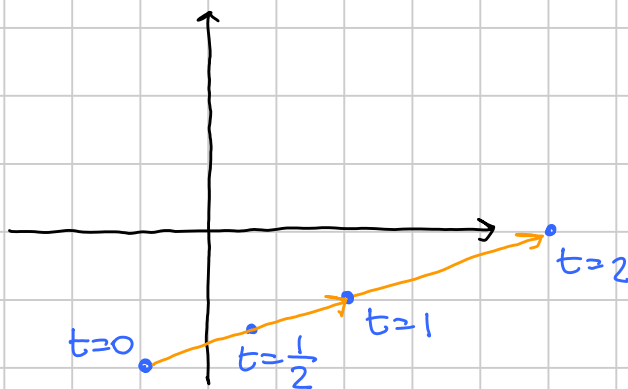
$$(-1+3t, -2+t)$$

$$t=0 \rightsquigarrow (-1, -2)$$

$$t=1 \rightsquigarrow (-1, -2) + (3, 1)$$

$$t=2 \rightsquigarrow (-1, -2) + 2(3, 1)$$

$$t = \frac{1}{2} \rightsquigarrow (-1, -2) + \frac{1}{2}(3, 1)$$



Quando t varia in $\mathbb{R}$, l'smino percorre una retta.
Scritta la retta nella forma generale

$$\underbrace{\vec{w}}_{\substack{\text{partenza!} \\ \text{posizione per } t=0}} + t \underbrace{\vec{v}}_{\text{direzione di movimento}}$$

Così si ottiene una retta se e solo se $\vec{v} \neq (0,0)$

Esercizio Scrivere in parametrica la retta passante per $\underbrace{(2, 5)}_P$ e $\underbrace{(3, -1)}_Q$.

$$\begin{aligned} \underbrace{P}_{\text{partenza}} + t(Q-P) &= (2, 5) + t(1, -6) \\ &= (2+t, 5-6t) \end{aligned}$$



In alternativa posso partire da Q e andare verso P. Ottengo

$$Q + t(P-Q) = (3, -1) + t(-1, 6) \text{ anche } (3, -1) + t(1, -6) \text{ è ok!}$$

Domanda: come passo da parametrica a cartesiana?
e viceversa?

Parametrica: $(2, 5) + t(1, -5)$

2° modo: sostituisco 2 valori a t (ad esempio $t=0$ e $t=1$), trovo 2 p.ti della retta, poi uso formula di percorso per la retta per 2 p.ti

2° modo (più efficace) $(2+t, 5-6t)$ $x=2+t$
 $y=5-6t$

ed elimino t : $t = x - 2$ sostituisco nella 2ª

$$y = 5 - 6t = 5 - 6(x-2) = 5 - 6x + 12 = 17 - 6x$$

$$y = -6x + 17$$

$$6x + y - 17 = 0$$

Fatto generale: scritta la retta in parametrica $(a, b) + t(c, d)$
il coeff. angolare è $\frac{d}{c}$, ovviamente se $c \neq 0$
(se $c = 0$ la retta è verticale)

Come passo dalla contesto alla parametrica?

$3x + 2y - 5 = 0$ Mi serve un p.to di partenza e la direzione
p.to qualunque
della retta

$$x=0 \leadsto y=\frac{5}{2} \leadsto (0, \frac{5}{2}) \text{ è un pto della retta}$$

$x = 1 \leadsto y = 1 \leadsto (1, 1)$ è un altro pto della retta

Come direzione posso usare la differenza tra i 2 pti prec.

In questo caso $(-1, \frac{3}{2})$ e quindi

$$(1, 1) + t \left(-1, \frac{3}{2}\right)$$

Posso liberarmi della frazione moltiplicando per 2

$$(1,1) + t(-2,3)$$

Fatto generale : se in cartesiana ho $ax + by + c = 0$, allora un possibile vettore direzione è $(-b, a)$ come nell'esempio.

RETTE PER L'ORIGINE

Cartesiana : $ax + by = 0$

Parametrica : $t(c, d)$

$(0,0) + t(c,d)$
↑
punto dall'origine

Ora $ax + by$ è il prodotto scalare tra (a,b) e (x,y) .

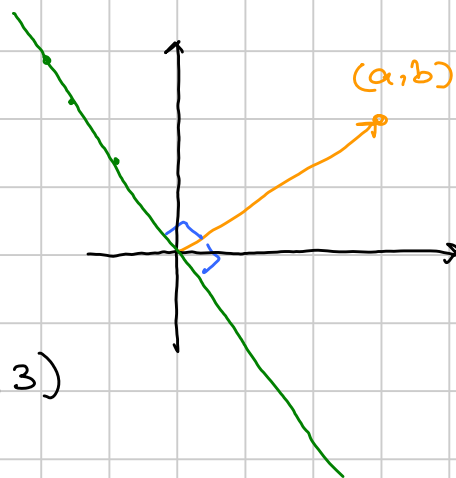
Quindi $(x,y) \in \text{retta} \Leftrightarrow \langle (a,b), (x,y) \rangle = 0$

$\Leftrightarrow (x,y)$ è perpendicolare ad (a,b)

Quindi (a,b) è un vettore $\perp$ a tutti i vettori della retta

Esempio $3x + 2y = 0$

$(3,2) =$ vettore $\perp$ alla retta



In parametrica una possibilità è $t(-2,3)$

Fatto generale : la direzione in parametrica e il vettore (a,b) dei coeff. della cartesiana implicita sono vettori tra di loro ortogonali

Il fatto generale vale anche se la retta non passa per l'origine.

Esempio 1 $2x - 5y + 7 = 0$ passo in parametrica

$$y = 1 \leadsto x = -1 \leadsto (-1, 1) \text{ partenza}$$

$$\text{La direzione } \vec{v} \quad (5, 2) \quad (-1, 1) + t(5, 2)$$

$$\text{Retta per } (1, 1) \text{ e } (3, -7) \quad (1, 1) + t(2, -8)$$

Che angolo formano le 2 rette tra di loro?

È l'angolo tra le direzioni, quindi

$$\cos \theta = \frac{\langle (5, 2), (2, -8) \rangle}{|(5, 2)| \cdot |(2, -8)|} = \frac{10 - 16}{\sqrt{29} \sqrt{68}} = \frac{-6}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{68}}$$

$$\text{Se metto il valore assoluto, quindi } \cos \theta = \frac{6}{\sqrt{} \cdot \sqrt{}}$$

otengo il minore dei 4 angoli (= a 2 a 2)

↑
quello acuto,