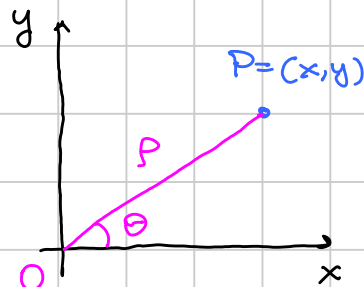


COORDINATE POLARI NEL PIANO

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ x e y sono le coord. CARTESIANE

Le coordinate POLARI ρ e θ sono

- ρ = distanza di P dall'origine
(cioè la norma di (x,y))
- θ = angolo fra OP ed il semiasse positivo delle x
(inteso nel senso della trigonometria)

Esempi $(1,0)$

$\rho = 1$

$\theta = 0$

 $(0,1)$

$\rho = 1$

$\theta = \frac{\pi}{2}$

 $(-1,0)$

$\rho = 1$

$\theta = \pi$

 $(0,-1)$

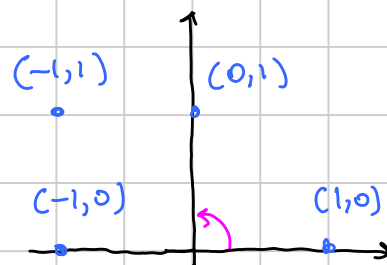
$\rho = 1$

$\theta = -\frac{\pi}{2}$ oppure $\theta = \frac{3\pi}{2}$

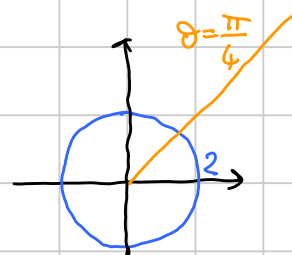
 $(-1,1)$

$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \frac{3\pi}{4}$



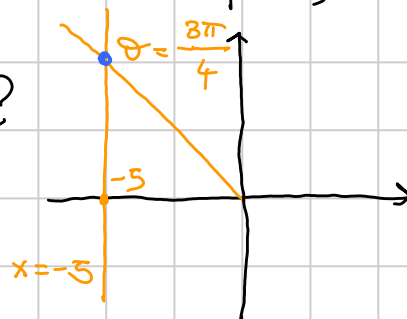
Esempio Come sono fatti tutti i punti con $\rho = 2$?
Circonf. di raggio 2



Come sono fatti tutti i pti con $\theta = \frac{\pi}{4}$?

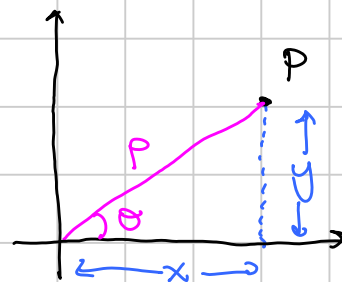
L'origine ha $\rho = 0$ e θ non definito (ma è l'unico p.to)

Come sono fatti i pti con $\theta = \frac{3\pi}{4}$ e $x = -5$?



FORMULE DI PASSAGGIO

- ① Se conosco p e θ , come trovo x e y ?
Precorso! Trigon. nei triangoli rettangoli



$$x = p \cos \theta \quad y = p \sin \theta$$

- ② Se conosco x e y , come trovo p e θ ?

$$p = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Per $\theta \leadsto$ guardare il disegno!

Dalle prime formule $\frac{y}{x} = \frac{p \sin \theta}{p \cos \theta} = \tan \theta$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

Achtung! ① Ci sono dei guai se $x = 0$

- ② Conoscere $\tan \theta$ non vuol dire conoscere univocamente θ . Ad esempio, se $\tan \theta = 1$ posso avere $\theta = \frac{\pi}{4}$ oppure $\theta = \frac{5\pi}{4}$.
Per stabilire quello giusto, guardo il disegno!

— o — o —

PRODOTTO SCALARE E COORDINATE POLARI

$$\vec{v}_1 = (x_1, y_1)$$

$$\vec{v}_2 = (x_2, y_2)$$

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Scrivo gli stessi vettori in coord. polari

$$\vec{v}_1 \leadsto p_1 \text{ e } \theta_1$$

$$\vec{v}_2 \leadsto p_2 \text{ e } \theta_2$$

Per le formule di passaggio

$$x_1 = p_1 \cos \theta_1$$

$$x_2 = p_2 \cos \theta_2$$

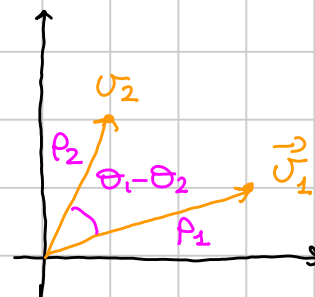
$$y_1 = p_1 \sin \theta_1$$

$$y_2 = p_2 \sin \theta_2$$

$$\begin{aligned} x_1 x_2 + y_1 y_2 &= p_1 p_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + p_1 p_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ &= p_1 p_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad \leftarrow \text{PRECORSO} \end{aligned}$$

Quindi

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos(\text{ang. compreso})$$



Prodotto scalare = prodotto norme · coseno angolo compreso

In particolare

- $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ se e solo se uno dei 2 vettori è nullo, oppure l'angolo compreso è $\pm \frac{\pi}{2}$, cioè i vettori sono perpendicolari
- a parità di norme, il prodotto scalare è max quando ang. compreso = 0 ed è minimo quando è π

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$$

↓
valore assoluto del
prodotto scalare

↓
prodotto delle norme

- facendo i quadrati

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2 \leq |\vec{v}|^2 \cdot |\vec{w}|^2$$

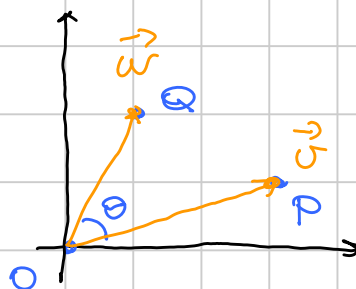
DISUGUAGLIANZA
DI CAUCHY-SCHWARZ

Altra interpretazione del prodotto scalare

$$|\vec{v} - \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

|| || ||

QP² = OP² + OQ²



Teorema di CARNOT (teo. del coseno) (precorso)

$$QP^2 = OP^2 + OQ^2 - 2 \cdot OP \cdot OQ \cdot \cos \theta$$

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = OP \cdot OQ \cdot \cos \theta$$

Altra interpretazione di C-S Considero il polinomio

$$|\vec{v} + t\vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + t^2|\vec{w}|^2 + 2t\langle\vec{v}, \vec{w}\rangle \geq 0$$

perché è un $\square$

Precorso: per essere sempre ≥ 0 un polinomio di 2° grado deve avere

- $\Delta \leq 0$ $\Delta =$ discriminante
- coeff. di $t^2 \geq 0$ (gratis perché $|\vec{w}|^2 \geq 0$)

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \langle\vec{v}, \vec{w}\rangle^2 - |\vec{v}|^2 \cdot |\vec{w}|^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\langle\vec{v}, \vec{w}\rangle^2 \leq |\vec{v}|^2 \cdot |\vec{w}|^2} \quad \text{C.S. in altro modo.}$$

[Precorso: $at^2 + 2bt + c$ ha $\Delta = b^2 - ac$]
— — —

Esercizio 1 Trovare l'angolo tra $\vec{v} = (3, 1)$ e $\vec{w} = (1, 2)$

$$\cos\theta = \frac{\langle\vec{v}, \vec{w}\rangle}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{3 \cdot 1 + 1 \cdot 2}{\sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 2 Trovare un vettore di norma 1 che faccia un angolo di $\frac{\pi}{3}$ con il vettore $\vec{v} = (3, 1)$.
Me ne aspetto 2 dalla figura

Chiamo il vettore incognito $\vec{w} = (a, b)$ e impongo

$$a^2 + b^2 = 1 \quad (|\vec{w}| = 1)$$

$$\frac{1}{2} = \cos\theta = \frac{\langle\vec{v}, \vec{w}\rangle}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{3a + b}{\sqrt{10} \cdot 1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 \\ 3a + b &= \frac{\sqrt{10}}{2} \end{aligned}}$$

↑ risolvo e trovo a e b

