

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 01

Titolo nota

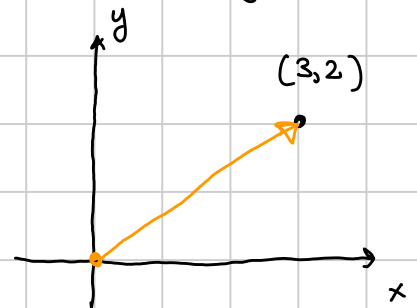
01/10/2014

- ① Geometria Analitica in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$
 - ② Sistemi lineari
 - ③ Spazi vettoriali e applicazioni lineari
 - ④ Prodotti scalari
- } MATRICI

GEOMETRIA DEL PIANO - VETTORI GEOMETRICI

$\mathbb{R}^2$ = piano cartesiano. Gli elementi di $\mathbb{R}^2$ sono coppie (x, y) che penso in 2 modi:

- come punti del piano
- come "vettori"



Pensandoli come vettori, posso definire le operazioni

• SOMMA $\vec{v} = (a, b)$, $\vec{w} = (c, d)$ $\vec{v} + \vec{w} = (a+c, b+d)$

• PRODOTTO DI UN VETTORE PER UN NUMERO

$\vec{v} = (a, b)$
↑
vettore

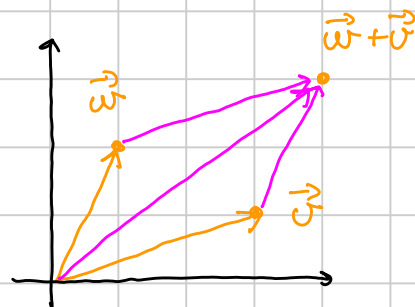
$\lambda \in \mathbb{R}$
↑
numero

$\lambda \vec{v} = (\lambda a, \lambda b)$

Geometricamente, cosa vuol dire?

$\vec{v} = (3, 1)$ $\vec{w} = (1, 2)$

$\vec{v} + \vec{w} = (4, 3)$



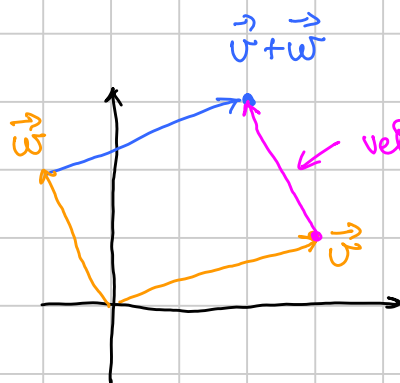
La somma corrisponde alla regola del parallelogrammo

Moltiplicare per λ equivale a dilatare di un fattore λ (capovolgendo rispetto all'origine se $\lambda < 0$)

Interpretazione della somma: sommare $\vec{v}$ e $\vec{w}$ equivale a

→ fare il vettore $\vec{v}$

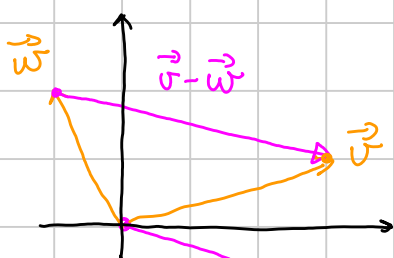
→ riportare il vettore $\vec{w}$ a partire dal p.to di arrivo di $\vec{v}$,



$\vec{v} + \vec{w}$

vettore parallelo e "uguale" a $\vec{w}$
riportato a partire dall'arrivo di $\vec{v}$

Allo stesso modo si interpreta la differenza $\vec{v} - \vec{w}$



$\vec{v} - \vec{w}$

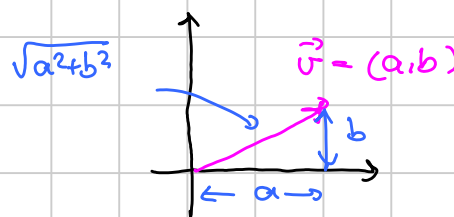
$\vec{v} - \vec{w}$

$\vec{v} - \vec{w}$ = vettore che aggiunto a $\vec{w}$ dà $\vec{v}$
= vettore con p.to di applic. in $\vec{w}$ che arriva in $\vec{v}$

LUNGHEZZA DI UN VETTORE = NORMA DEL VETTORE

Si indica con $|\vec{v}|$ oppure $\|\vec{v}\|$. Se $\vec{v} = (a, b)$, allora

$$|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



PRODOTTO SCALARE TRA 2 VETTORI

Siano $\vec{v} = (a, b)$, $\vec{w} = (c, d)$ due vettori.

Il prod. scalare si indica con una di queste notazioni:

$$\vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$(\vec{v}, \vec{w})$$

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

ed è definito come

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = ac + bd$$

INPUT: 2 vettori

OUTPUT: un numero, cioè
uno SCALARE

Prod. scalare vs norma

$$\vec{v} = (a, b)$$

$$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \vec{v} \cdot \vec{v} = a^2 + b^2 = |\vec{v}|^2$$

Distanza tra 2 vettori

$$\vec{v} = (a, b)$$

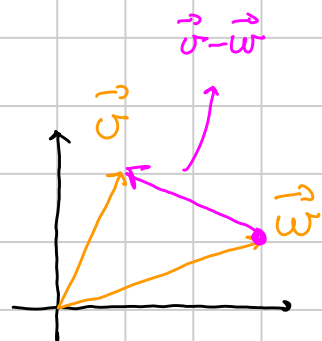
$$\vec{w} = (c, d)$$

$$\text{dist}(\vec{v}, \vec{w}) = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

↑
dist. tra 2 pti

Distanza = norma della differenza

$$\text{dist}(\vec{v}, \vec{w}) = |(a-c, b-d)| = |\vec{v} - \vec{w}|$$



Proprietà del prodotto scalare

$$\textcircled{1} \quad \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

[Dim. $\vec{u} = (u_1, u_2)$ $\vec{v} = (v_1, v_2)$ $\vec{w} = (w_1, w_2)$

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

$$\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = (u_1 + v_1) \cdot w_1 + (u_2 + v_2) \cdot w_2$$

$$= u_1 w_1 + v_1 w_1 + u_2 w_2 + v_2 w_2$$

↓ sono uguali

$$\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = u_1 w_1 + u_2 w_2 + v_1 w_1 + v_2 w_2 \quad]$$

$$\textcircled{2} \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$

$$\textcircled{3} \quad \langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{4} \quad |\vec{u} + \vec{v}|^2 &= \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle \\
 &= \langle \vec{u}, \vec{u} + \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle \\
 &= \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \\
 &= |\vec{u}|^2 + 2 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + |\vec{v}|^2
 \end{aligned}$$

In conclusion

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

Analogamente

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$