

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 59 (-1 :)

Titolo nota

20/12/2013

COSE STRANE $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ Calcolare e^A oppure su A

Fino a sappiamo fare le potenze di A : $A^0, A^1, A^2, A^3, \dots$

Per la formula di Taylor di analisi, le funzioni strane sono serie di potenze... quindi

e^A la possiamo definire come $\text{Id} + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \frac{1}{4!} A^4 + \dots$

Le potenze le sappiamo fare, le serie pure...

Ogni coeff. diventa somma di una serie e bisogna solo vedere a cosa converge.

SE la matrice è diagonale, posso fare le potenze facendo le potenze dei singoli elementi. Nel caso dell'esempio, la forma canonica di A è diagonale con autovalori: $\lambda=2$ e $\lambda=3$, quindi

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = M^{-1} A M = D \quad \rightsquigarrow \quad A = M D M^{-1}$$

Ma allora $M^{-1} A^k M = D^k$ come visto tante volte, quindi

$$\left(\text{Id} + A + \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{6} A^3 + \dots \right) = M M^{-1} + M D M^{-1} + \frac{1}{2} M D^2 M^{-1} + \frac{1}{6} M D^3 M^{-1} + \dots$$

$$= M \left(\text{Id} + D + \frac{1}{2} D^2 + \frac{1}{6} D^3 + \dots \right) M^{-1} = M e^D M^{-1}$$

si calcola facilmente

$$e^D = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}. \text{ A questo punto si torna indietro}$$

$$e^A = M^{-1} e^D M = M^{-1} \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} M$$

$M \circ M^{-1}$ (controllare quale) ha per colonne una base di autovettori.

Cambi di base e algoritmo JPEG

Immagine: 800×600 pixel

Ogni pixel sono 3 byte: RGB

R, G e B sono numeri compresi tra 0 e 255

Semplificazione: immagine in bianco e nero: in ogni pixel c'è un solo numero da 0 a 255

↑ ↑
nero bianco

Primo passo: scomporre in sottoquadri 8×8

Ci riduciamo a considerare matrici 8×8

Queste sono uno sp. vettoriale di dim. 64 e una base canonica è quella con un 1 e 63 volte 0.

Maniera BOVINA di trasmettere la matrice = trasmettere i 64 numeri.

Se voglio comprimere il file 16 volte, che posso fare?

1ª proposta Passare da 8×8 a 2×2

e in ogni sottoblocco spedisco la media. Risultato: schifenza!!

4×4	4×4
4×4	4×4

2ª proposta Cambio il campionamento.

In ogni pixel ho un numero da 0 a 255. Lo divido in 16 blocchi e poi:

da 0 a 7 $\leadsto$ spedisco 4

da 8 a 15 $\leadsto$ " 12

da 16 a 23 $\leadsto$ " 20

e così via. Invece di 256 possibilità, ne restano 16.

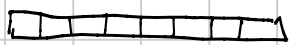
Risultato: schifenza!!

3ª proposta Cambio base nello spazio (di dim. 64) delle matrici 8×8 .

Sarebbe bello avere una nuova base ortogonale, o meglio ortonormale.

Il miglior modo di cercare una base ortonormale è come autovettori di un' applicazione simmetrica 64×64

Modello semplice: invece di spedire matrici 8×8 , voglio spedire vettori lunghi 8



Una possibile base dell' 8×1 sarebbe la canonica.

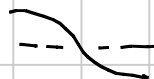
Invece si usa questa

1 1 1 1 1 1 1 1

~~1 1 1 1 1 1 1 1~~

$\cos \frac{\pi}{16}$ $\cos \frac{3\pi}{16}$ $\cos \frac{5\pi}{16}$ $\cos \frac{7\pi}{16}$

$\cos \frac{15\pi}{16}$



$\cos \frac{\pi}{16} \cdot 2$ $\cos \frac{3\pi}{16} \cdot 2$

$\cos \frac{15\pi}{16} \cdot 2$

$\cos \frac{\pi}{16} \cdot 3$ $\cos \frac{3\pi}{16} \cdot 3$ - - - - ,

$\cos \frac{15\pi}{16} \cdot 3$

⋮

Questa (miracolo!) è una base ortonormale e sono tutti autovettori di questa matrice 8×8 (non è esissimo, ma quasi)

$$(a, b, c, d, e, f, g, h) \rightsquigarrow (\overset{\uparrow}{b+d}, a+c, b+d, c+e, \dots, g+a)$$

Questa matrice ha?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 0 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Gli autovettori di questa matrice sono proprio quei coseni.