

Rapporti tra $\mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}$

Esercizio Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$. Problema: determinare la forma canonica e la matrice di cambio base che porta A in forma canonica.

Polinomio caratt.: $P_A(\lambda) = \lambda^2 - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Tr}(A)}}{4}\lambda + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Det } A}}{13} = 0 = \text{Det} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -5 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

Radici di $P_A(\lambda)$: $2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i$

Quindi A ha 2 autovalori complessi coniugati.

Su $\mathbb{C}$ la forma canonica è

$$\begin{pmatrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 2-3i \end{pmatrix} = D$$

Voglio trovare M invertibile t.c. $D = M^{-1} A M$.

La base sarà costituita da autovettori di A , che saranno complessi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2+3i) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x+2y &= (2+3i)x \\ -5x+3y &= (2+3i)y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2y &= (1+3i)x \\ -5x &= (-1+3i)y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1+3i)x - 2y &= 0 \\ -5x + (1-3i)y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1+3i & -2 \\ -5 & 1-3i \end{pmatrix} \leftarrow \text{Det} = 0$$

$$x=1 \quad y = \frac{1+3i}{2}$$

Questa scelta risolve anche la 2ª equazione:
 $\nearrow$ autovett. relativo a $(2+3i)$

$$-5 + (1-3i) \frac{(1+3i)}{2} = -5 + \frac{10}{2} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2-3i) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x+2y &= (2-3i)x \\ -5x+3y &= (2-3i)y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(1-3i) - 2y &= 0 \\ -5x + (1+3i)y &= 0 \end{aligned}$$

$$x=1 \quad y = \frac{1-3i}{2}$$

Era prevedibile? Sì, perché l'autovettore relativo a $(2-3i)$ deve essere il coniugato di quello relativo a $(2+3i)$.

Altra possibile scelta: $(2, 1+3i), (2, 1-3i)$. Quindi

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1+3i & 1-3i \end{pmatrix}$$

Input: comp. base nuova

Output: comp. base canonica

$M^{-1}AM$ deve essere D .

$$\det M = 2-6i - 2-6i = -12i$$

Verifica

$$\frac{-1}{12i} \begin{pmatrix} 1-3i & -2 \\ -1-3i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1+3i & 1-3i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2+2+6i & 2+2-6i \\ -10+3+9i & -10+3-9i \end{pmatrix}$$

$$\frac{-1}{12i} \begin{pmatrix} 1-3i & -2 \\ -1-3i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4+6i & 4-6i \\ -7+9i & -7-9i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4+6i-12i+18+14 \mp 18i & 4-6i-12i+18 \mp 14+18i \\ -4-6i-12i+18-14 \pm 18i & -4+6i-12i-18-14-18i \end{pmatrix}$$

Ci deve essere un errore di segno... (segui conetti dopo video: con'forma!)

Qual è la forma canonica sui reali? Se gli autovalori sono $2 \pm 3i$, la forma canonica è

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Se sono $\alpha \pm i\beta$ è $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$

Come trovo la matrice M ?

Come deve essere fatta la nuova base $\{v_1, v_2\}$. Deve accadere che

$$Av_1 = 2v_1 - 3v_2$$

$$Av_2 = 3v_1 + 2v_2$$

v_1 e v_2 mi servono REALI

Cosa so? Che ci sono autovettori complessi v e $\bar{v}$ tali che

$$Av = (2+3i)v$$

$$A\bar{v} = (2-3i)\bar{v}$$

Scrivo $u = u_1 + i u_2$
 $\uparrow$ complesso $\uparrow$ reali $\uparrow$

$$A u = A (u_1 + i u_2) = A u_1 + i A u_2$$

$$\begin{aligned} (2+3i) u &= (2+3i) (u_1 + i u_2) = 2u_1 + 2i u_2 + 3i u_1 - 3u_2 \\ &= (2u_1 - 3u_2) + i (3u_1 + 2u_2) \end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato che $A u_1 + i A u_2 = (2u_1 - 3u_2) + i (3u_1 + 2u_2)$

Quindi la base $\{u_1, u_2\}$ che porta A nella forma canonica REALE è costituita dalla parte reale e dalla parte immaginaria degli autovettori complessi.

Se la base che diagonalizzava sui complessi era

$$(2, 1+3i), (2, 1-3i) \quad (2, 1) \pm i (0, 3)$$

allora la base buona sui reali è

$$(2, 1), (0, 3) \quad \leftarrow \text{parte reale e parte immaginaria degli autovett. complessi}$$

SE i conti fossero giusti:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ e dovrebbe succedere che } M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(Provare a fare la verifica!) _ o _ o _

Esempio collegato $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 13 & 4 \end{pmatrix}$ Domanda: è simile alla precedente?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Basta guardare se hanno la stessa forma canonica!

In questo caso sì, perché $p_B(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 13$ è lo stesso di A , quindi stessa forma canonica!

Achtung! In generale, stesso pd. caratt. $\nRightarrow$ stessa forma canonica !!!

È vero in questo caso perché è diagonalizzabile !!!

Ad esempio $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

hanno stesso pd. car., ma forme canoniche diverse.

Come determino M tale che $M^{-1}AM = B$? M invertibile
(so che esiste perché sono simili)

Io so andare da A alla canonica e da B alla canonica.

$$C = M_1^{-1} A M_1$$

$$C = M_2^{-1} B M_2$$

M_1 e M_2 le so trovare

Confrontando le 2 ho che $M_1^{-1} A M_1 = M_2^{-1} B M_2$

Ora ricavo B :

$$B = M_2 M_1^{-1} A M_1 M_2^{-1}$$

$$= (M_1 M_2^{-1})^{-1} A (M_1 M_2^{-1})$$

Quindi cerco $M = M_1 M_2^{-1}$ soo andato da A a B passando per C .

Domanda: $\mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$? Sì, di dim. = 2.

Una base è $1, i$ (ogni complesso si scrive come $a+bi$ con a e b reali)

$\mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$? Sì, di dim. 1

Una base è 1 (o anche $3+7i$) (ogni complesso si scrive come $a \cdot 1$, con $a \in \mathbb{C}$)

$\mathbb{C}^2$ è uno sp. vett. reale di dim 4. Una base è $(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)$

$\mathbb{C}^2$ è uno sp. vett. complesso di dim. 2. Una base è $(1, 0), (0, 1)$
ma anche $(1+2i, 0), (1, 3-5i)$.