

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 57

Titolo nota

18/12/2013

Dalla lezione precedente:

$$P = (1, 2+t, 3+2t) \quad Q = (1+s, -1+3s, 2+4s)$$

$$\begin{cases} -3+3s-t-2+8s-4t=0 \\ s-3+9s-2t-4+16s-8t=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 11s-5t=5 \\ 25s-11t=8 \end{cases}$$

2° modo per fare la distanza tra 2 rette sghembe.

Faccio $\text{dist}^2(P, Q)$ e vedo per quali valori di t ed s risulta minima.

$$\begin{aligned} \text{dist}^2(P, Q) &= (1+s-1)^2 + (-1+3s-2-t)^2 + (2+4s-3-2t)^2 \\ &= s^2 + (3s-t-3)^2 + (4s-2t-1)^2 \\ &= \cancel{s^2} + \cancel{9s^2} + \cancel{t^2} + 9 - \cancel{6st} - 18s + 6t + \cancel{16s^2} + \cancel{4t^2} + 1 - \cancel{16st} - 8s + 4t \\ &= 26s^2 + 5t^2 - 22st - 26s + 10t + 10 \end{aligned}$$

Ora dovrai cercare i valori di s e t per cui l'espressione risulta minima. Ora questa espressione è somma di quadrati.

Lo posso realizzare sistemando le s con il 1° quadrato e le t con il 2°

$$\begin{aligned} &26 \left(s^2 - \frac{22}{26} st - s \right) + 5t^2 + 10t + 10 \\ &= 26 \left(\left(s - \frac{11}{26}t - \frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{11}{26} \right)^2 t^2 - \frac{1}{4} - \frac{11}{26}t \right) + 5t^2 + 10t + 10 \\ &= 26 \cdot \text{quadrato} + \text{polinomio di 2° grado in } t \\ &\text{che posso ancora scrivere come somma di } \square. \end{aligned}$$

Imponendo i 2 quadrati $= 0$, ottengo i valori di s e t .

Esercizio

$$r_1 = (1, 2, 3) + t (0, 1, 2) = P_1 + t v_1$$

$$r_2 = (1, -1, 2) + t (1, 3, 4) = P_2 + t v_2$$

Esercizio: trovare piano passante per P_2 e parallelo a r_1 e che contenga r_2 .



Come sarà fatto il piano?

$$P_2 + t w_1 + s w_2$$

Dovendo contenere r_2 uso $w_1 = v_2$: $P_2 + t v_2 + s w_2$?
 Se come w_2 uso v_1 , allora il piano è // ad r_1

$$P_2 + t v_2 + s v_1$$

Piano che contiene r_2 ed è parallelo a r_1

1ª verifica Questo piano non interseca r_1 . Per calcolare l'intersezione dovei risolvere

$$P_2 + t v_2 + s v_1 = P_1 + r v_1$$

cioè

$$t v_2 + (s-r) v_1 + \frac{1}{2}(P_2 - P_1) = 0$$

Se riuscissi a risolvere il sistema, vorrebbe dire che $v_2, v_1, P_2 - P_1$ non sono lin. indep. perché avrei una loro combinazione lineare che fa 0 e ha un coeff. uguale a 1. Ma essendo le rette sghembe, per forza devono essere lin. indep.

2ª verifica (equivalente) Un piano ed una retta sono paralleli se e solo se la giacitura della retta è contenuta nella giacitura del piano, ma essendo la giacitura di r_1 lo span di v_1 , per forza v_1 deve essere contenuto nella giacitura del piano.

Osservazione La distanza tra r_1 ed r_2 è uguale alla distanza tra un qualunque punto di r_1 ed il piano appena trovato.

Area e prodotti vettoriali

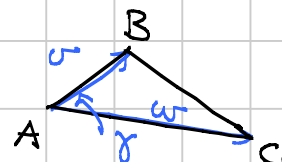
Esercizio Calcolare l'area del triangolo con vertici in

$$A = (1, 0, 1)$$

$$B = (2, -1, 3)$$

$$C = (3, 2, 0)$$

Precorso: Area = $\frac{1}{2} |AB| \cdot |AC| \cdot \sin \gamma$



$$|AB| = \|B - A\| = \|\underbrace{(1, -1, 2)}_u\| = \sqrt{6}$$

$$|AC| = \|C - A\| = \|\underbrace{(2, 2, -1)}_w\| = \sqrt{5}$$

Mi serve $\sin \gamma$, che deduco da $\cos \gamma$

$$\cos \gamma = \frac{\langle u, w \rangle}{\|u\| \cdot \|w\|} = \frac{-2 - 2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{5}} = \frac{-4}{\sqrt{30}}$$

$$\sin \gamma = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} = \sqrt{1 - \frac{16}{30}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{30}}$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \cdot \cancel{\sqrt{6}} \cdot \cancel{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{14}}{\cancel{\sqrt{30}}} = \frac{1}{2} \sqrt{14}$$

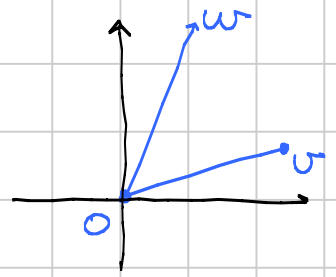
2° modo A partire da u e w , costruisco con la formula misteriosa, "il" vettore perpendicolare a u e w

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-3, 1, 2) \quad \text{La norma di questo è } \sqrt{14}$$

Quindi area triangolo = $\frac{1}{2}$ norma del vettore prodotto dalla formula misteriosa.

Esercizio Prendiamo un triangolo con un vertice nell'origine, un vertice in v ed un vertice in w .

Alla pancia l'area diventa



$$\begin{aligned}\text{Area} &= \frac{1}{2} \|v\| \cdot \|w\| \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sqrt{1 - \frac{\langle w, w \rangle^2}{\|w\|^2 \cdot \|v\|^2}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\|w\|^2 \cdot \|v\|^2 - \langle v, w \rangle^2}\end{aligned}$$

Se $v = (x_1, y_1, z_1)$ e $w = (x_2, y_2, z_2)$, allora

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2}$$

Nell'altra maniera produco il vettore perpendicolare

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (y_1 z_2 - z_1 y_2, -x_1 z_2 + x_2 z_1, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

Nel secondo modo l'area diventa la norma del vettore: z , quindi

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \sqrt{(y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (-x_1 z_2 + x_2 z_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2}$$

Per dimostrare che funziona, non resta che svolgere e vedere che vengono uguali.

— o — o —

Il vettore misterioso è il prodotto vettore di v e w e si indica con $v \times w$
INPUT: 2 vettori di $\mathbb{R}^3$, OUTPUT: il vettore di $\mathbb{R}^3$ perpendicolare a v e w
e di lunghezza = $2 \cdot \text{area triangolo di vertici } o, v, w$