

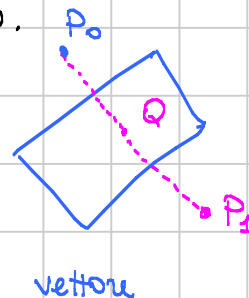
ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 56

Titolo nota

18/12/2013

Dato un p.to $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ in $\mathbb{R}^3$ ed un piano di equazione $ax+by+cz+d=0$, trovare la proiezione di P_0 sul piano.

Piano Intersecare il piano con la retta passante per P_0 e $\perp$ al piano stesso.



Posto $w = (a, b, c)$, l'eq. del piano la scrivo come $\langle w, x \rangle + d = 0$
la retta è $P_0 + tw$.

Sostituendo ottengo $\langle w, P_0 + tw \rangle + d = 0$, cioè
 $\langle w, P_0 \rangle + t \langle w, w \rangle + d = 0$

cioè

$$t = \frac{-d - \langle w, P_0 \rangle}{\langle w, w \rangle} = - \frac{d + \langle w, P_0 \rangle}{\|w\|^2}$$

Questo valore di t , sostituito nella param. della retta, mi dà Q :

$$Q = P_0 - \frac{d + \langle w, P_0 \rangle}{\|w\|^2} \cdot w$$

Distanza di P_0 dal piano = distanza di P_0 da Q , quindi

$$\begin{aligned} \text{dist}(P_0, Q) &= \|P_0 - Q\| = \left\| \underbrace{\frac{d + \langle w, P_0 \rangle}{\|w\|^2}}_{\text{Numero}} \cdot w \right\| = \frac{|d + \langle w, P_0 \rangle|}{\|w\|^2} \cdot \|w\| \\ &= \frac{|d + \langle w, P_0 \rangle|}{\|w\|} \end{aligned}$$

Tornando in notazione con le componenti trovo:

$$\text{dist}(P_0, \text{piano}) = \frac{|d + ax_0 + by_0 + cz_0|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Se volessi il simmetrico di P_0 rispetto al piano?

Basta che cerchi il punto P_1 tale che

$$\frac{P_1 + P_0}{2} = Q$$

cioè $P_1 + P_0 = 2Q$, cioè $P_1 = 2Q - P_0$, cioè

$$P_1 = P_0 - 2 \frac{d + \langle w, P_0 \rangle}{\|w\|^2}$$

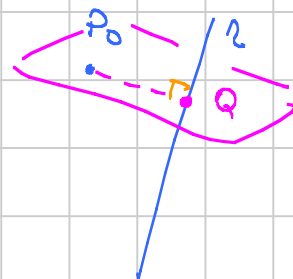
In componenti:

$$P_1 = (x_0, y_0, z_0) - 2 \frac{d + ax_0 + by_0 + cz_0}{a^2 + b^2 + c^2}$$

— o — o —

Esercizio Calcolare, in $\mathbb{R}^3$, la distanza del punto $P_0 = (1, 2, 3)$ dalla retta di eq. parametrica $(1, -1, 0) + t(0, 1, 4)$

1° modo Scrivo il piano per P_0 che sia $\perp$ alla retta, interseco e trovo un certo Q . Poi faccio la dist. tra P_0 e Q



Il piano sarà del tipo $0 \cdot x + 1 \cdot y + 4 \cdot z + d = 0$, trovo d imponendo il passaggio per P_0 : $2 + 12 + d = 0 \Rightarrow d = -14$

Piano: $y + 4z - 14 = 0$,

Intersezione retta - piano: sostituisco $(1, -1+t, 4t)$ nell'eq. del piano:
 $-1 + t + 16t - 14 = 0 \quad 17t = 15 \quad t = \frac{15}{17}$

$$\text{Quindi } Q = \left(1, -1 + \frac{15}{17}, \frac{60}{17}\right) = \left(1, -\frac{2}{17}, \frac{60}{17}\right)$$

Non resta che fare la distanza.

— o — o —

2° modo Scrivo la distanza (al quadrato) tra P_0 ed il generico punto della retta e minimizzo

$$\begin{aligned} \text{dist}^2 \left(\underbrace{(1, 2, 3)}_{P_0}, \underbrace{(1, -1+t, 4t)}_{\text{generico pto retta}} \right) &= (1-1)^2 + (2+1-t)^2 + (3-4t)^2 \\ &= (3-t)^2 + (3-4t)^2 \\ &= 9 - 6t + t^2 + 9 - 24t + 16t^2 \\ &= 17t^2 - 30t + 18 \end{aligned}$$

Cerco il valore di t che minimizza: $34t - 30 = 0 \quad t = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}$

Sostituendo il valore di t

→ nella retta trovo Q

→ nel polinomio di 2° grado trovo il valore della distanza al quadrato
— o — o —

Mutua posizione di 2 rette nello spazio

Date 2 rette nello spazio (definite in vari modi), stabilire se sono

- coincidenti
- parallele (e allora trovare la distanza)
- incidenti (e allora trovare p.to incontro, angolo, piano che le contiene)
- sghembe (e allora trovare la minima distanza)

Siano le 2 rette

$$r_1: P_1 + t v_1$$

$$r_2: P_2 + t v_2$$

Vado a vedere se v_1 e v_2 sono lin. indip., cioè faccio il rango della matrice che ha v_1 e v_2 come righe.

→ Se sono lin. dip., allora sono coincidenti o parallele

- Se $P_2 - P_1$ è a sua volta multiplo di v_1 e v_2 , allora sono coincidenti

- Se $P_2 - P_1$ è indep. da v_1 e v_2 , allora sono parallele

(fare la distanza è banale: basta fare la distanza tra P_1 ed r_2)

→ Se v_1 e v_2 sono lin. indip., allora sono incidenti o sghembe

1° modo: provo a calcolare l'intersezione: impongo

$$P_1 + \textcircled{t} v_1 = P_2 + \textcircled{s} v_2 \quad \text{due parametri diversi}$$

Ho 2 incognite e 3 equazioni (x, y, z) quindi può esserci soluzione oppure no.

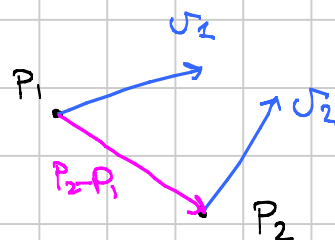
C'è soluzione se e solo se $t v_1 - s v_2 = P_2 - P_1$, cioè se e solo se $P_2 - P_1$ è comb. lin. di v_1 e v_2 , cioè se e solo se $\text{Span}\{v_1, v_2, P_2 - P_1\}$ ha dim. 2.

Regola in commercio:

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 2 \text{ e } \text{Rango} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ P_2 - P_1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \text{incidenti}$$

$$\text{" e } \text{Rango} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ P_2 - P_1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \text{sghembe}$$

2° modo Le rette sono incidenti se e solo se $v_1, v_2, P_2 - P_1$ sono nello stesso piano, cioè generano uno spazio di dimensione 2.



Come determino la distanza tra 2 rette sghembe

$$r_1 = (1, 2, 3) + t (0, 1, 2) \text{ lin. indep}$$

$$r_2 = (1, -1, 2) + t (1, 3, 4)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{Det} \neq 0 \Rightarrow \text{sghembe.}$

1° modo Cerco P sulla prima retta e Q sulla seconda retta in maniera tale che PQ sia $\perp$ alle due rette.

$$P = (1, 2t, 3+2t) \quad Q = (1+s, -1+3s, 2+4s)$$

$$\text{Impongo che } Q-P = (s, -1+3s-2-t, 2+4s-3-2t) \\ = (s, -3+3s-t, -1+4s-2t)$$

sia $\perp$ ai 2 vettori direzione:

$$\begin{cases} -3+3s-t-2+8s-4t=0 & \langle Q-P, v_1 \rangle \end{cases}$$

$$\begin{cases} s-3+9s-3t-4+16s-8t=0 & \langle Q-P, v_2 \rangle \end{cases}$$

Risolvere $\Rightarrow$ trovo t ed s, quindi P e Q e faccio la distanza.