

POLINOMI E MATRICI

Sia $p(x)$ un polinomio : $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$

Sia A una matrice $n \times n$.

Voglio calcolare $p(A)$. Questo ha senso perché

$$p(A) = a_0 \text{Id} + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_k A^k$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{combinazione lineare di potenze di } A}$

Domanda : esistono polinomi $p(x)$ tali che $p(A) = 0$
 $\uparrow$
 matrice $n \times n$ nulla

Teorema (Polinomi e matrici) Sia

$$\mathcal{P} = \{p(x) \text{ polinomi} : p(A) = 0\}.$$

Allora valgono i seguenti fatti.

- (1) $\mathcal{P} \neq \emptyset$, quindi c'è almeno un polinomio che annulla la matrice.
- (2) Nell'insieme $\mathcal{P}$ esiste un polinomio $m_A(x)$ di grado minimo e tutti gli altri elementi di $\mathcal{P}$ sono multipli di $m_A(x)$.

Dim (1) Consideriamo le matrici

$$\text{Id}, A^1, A^2, A^3, \dots, A^{n^2}$$

Si tratta di (n^2+1) matrici $n \times n$. Ora lo spazio delle matrici $n \times n$ ha dimensione n^2 . Essendo n^2+1 elementi, saranno linearmente dip., quindi esistono coeff. $a_0, a_1, \dots, a_{n^2}$, non tutti nulli, tali che

$$a_0 \text{Id} + a_1 A^1 + a_2 A^2 + \dots + a_{n^2} A^{n^2} = 0$$

Quindi $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n^2}x^{n^2}$ annulla la matrice, quindi sta in $\mathcal{P}$.

Def. Il polinomio $m_A(x)$ si chiama polinomio minimo di A , ed è il polinomio di grado più piccolo tra tutti quelli che annullano A .

Oss. Se due matrici A e B sono simili, allora hanno lo stesso insieme $\mathcal{P}$, quindi anche lo stesso polinomio minimo.

Fatto fondamentale Se $B = M^{-1} A M$ con M invertibile, allora

$$p(B) = M^{-1} p(A) M$$

cioè $p(B)$ è simile a $p(A)$.

Infatti già sappiamo che $B^k = M^{-1} A^k M$, ma allora

$$\begin{aligned} p(B) &= a_0 \text{Id} + a_1 B + a_2 B^2 + \dots + a_k B^k \\ &= a_0 M^{-1} M + a_1 M^{-1} A M + a_2 M^{-1} A^2 M + \dots + a_k M^{-1} A^k M \\ &= M^{-1} (a_0 \text{Id} + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_k A^k) M \\ &= M^{-1} p(A) M. \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } p(B) = 0 \iff p(A) = 0.$$

Oss. Questo ci autorizza a parlare di polinomio minimo di un'applicazione e non solo di una matrice.

STRUTTURA DEL POLINOMIO MINIMO

Teorema misterioso (HAMILTON - CAYLEY)

Il polinomio caratteristico di A , cioè $p(x) = \text{Det}(A - x \text{Id})$, sta nell'insieme $\mathcal{P}$, cioè annulla la matrice A .

Detto altrimenti, se sostituisco la matrice A nel suo polinomio caratteristico ottengo la matrice nulla.

Conseguenza: poiché tutti gli elementi di $\mathcal{P}$ sono multipli di $m_A(x)$, ne segue che il polinomio caratt. è multiplo di $m_A(x)$, cioè il polinomio minimo è un divisore del polinomio caratteristico.

Poiché il pol. caratt. ha grado SICURAMENTE n , il pol. minimo avrà grado $\leq n$.

Attenzione! Dimostrazione ASSURDA ma accattivante di H-C:

$$p(A) = \text{Det}(A - A \cdot \text{Id}) = 0$$

Fornirebbe anche con Traccia invece di Det, mentre in quel caso è falsa.

Teorema (Struttura del polinomio minimo)

(1) Tutti gli autovalori di A sono radici del polinomio minimo, però possono avere molteplicità più piccola (vale anche per gli autovalori complessi)

(2) Se tutti gli autovalori sono distinti, cioè hanno molt. 1, allora il pol. minimo coincide con quello caratteristico.

(Facile conseguenza di (1))

(3) Se un autovalore ha molteplicità algebrica ≥ 2 , allora la sua molteplicità come radice del polinomio minimo è la dimensione del più grande blocco di JORDAN relativo a quell'autovalore.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Autovalori: } \lambda = 1 \rightsquigarrow m_a = 2 \quad m_g = 1 \\ \lambda = 2 \rightsquigarrow m_a = m_g = 1$$

m_g dell'autovalore 1 è 1 perché $\text{rank}(A - 1 \cdot \text{Id}) = 2$.

Polinomio caratteristico: $(x-1)^2(x-2)$ (a meno del segno)

Forma canonica: $\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Polinomio minimo: $(x-1)^2(x-2)$ ← perché il blocco di jordan più grande relativo a $\lambda=1$ ha dim. 2.

Conseguenza Una matrice è diagonalizzabile se e solo se tutte le radici del suo polinomio minimo hanno molteplicità 1.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

pol. caratt.: $(x-2)^2(x-3)$
pol. minimo: $(x-2)^1(x-3)^1$

Esempio Come sono fatte tutte le matrici 4×4 tali che $A^2 = A$?

La condizione è come dire che $A^2 - A = 0$, cioè il polinomio $q(x) = x^2 - x$ annulla la matrice.

Ma allora il polinomio minimo deve essere un divisore di $q(x)$
 $q(x) = x^2 - x = x(x-1)$.

Ma allora ci sono 3 casi:

- ① $m_A(x) = x$, ma allora $A = 0$
- ② $m_A(x) = x-1$, ma allora $A - Id = 0$, cioè $A = Id$
- ③ $m_A(x) = x(x-1)$, ma allora A è una matrice diagonalizzabile che ha come autovalori solo $\lambda=0$ e $\lambda=1$.
Quindi la sua forma canonica è una di queste

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Queste sono tutte matrici di proiezione su un sottospazio,

— 0 — 0 —