

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 54

Titolo nota

13/12/2013

In generale

prodotti scalari $\rightarrow$ matrice associata scelta una base

$\searrow$ forma quadratica associata

$\downarrow \leftarrow$ se è definita positiva

basi ortonormali rispetto al prodotto scalare "strano"

Cosa succede se cambio base? Come cambia la matrice associata al prodotto scalare?

Sia V uno spazio vettoriale, sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base, e sia B la matrice associata ad un prodotto scalare rispetto a questa base.

Sia $\{w_1, \dots, w_n\}$ una seconda base, e sia C la matrice associata al prodotto scalare rispetto a questa nuova base.

Sia M la matrice di cambio di base, scelta in maniera che

M prende INPUT: componenti rispetto alla base $\{v_1, \dots, v_n\}$

OUTPUT: componenti rispetto alla base $\{w_1, \dots, w_n\}$.

Siano x e y le componenti di 2 vettori risp. $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Allora il prodotto scalare diventa

$$x^t B y$$

Le componenti degli stessi vettori risp. a $\{w_1, \dots, w_n\}$ sono Mx , My , quindi rispetto alla seconda base il prodotto scalare degli stessi due vettori diventa

$$(Mx)^t C (My) = x^t M^t C M y$$

Di conseguenza la relazione tra B e C è data da

$$B = M^t C M$$

dove M è invertibile
(è la matrice di cambio di base)

Achtung! Le matrici associate alle applicazioni lineari e quelle associate ai prodotti scalari sono "diverse", ad esempio hanno una legge di trasformazione diversa quando cambio base.
— o — o —

Def. Sia V uno spazio vettoriale, sia $b: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ un prodotto scalare, e sia $f: V \rightarrow V$ un' applicazione lineare.
Per semplicità poniamo $b(v, w) = \langle v, w \rangle_B$.
Si dice che f è SIMMETRICA se

$$\langle f(x), y \rangle_B = \langle x, f(y) \rangle_B$$

" f migra nei prodotti scalari"

Fatto 0 Fissiamo una base di V . Sia B la matrice associata al prodotto scalare, e sia A la matrice associata ad f .
Cosa si dice la relazione precedente?

$$f(x)^t B y = x^t B f(y)$$

$$(Ax)^t B y = x^t B Ay$$

$$x^t \boxed{A^t B} y = x^t \boxed{BA} y$$

Quindi per forza $A^t B = BA$

relazione che deve soddisfare la matrice di un' applicazione simmetrica rispetto ad un prodotto scalare

Oss. Se il prodotto scalare è quello canonico e la base è quella canonica, allora $B = Id$ e ritroviamo $A^t = A$ come due settimane fa.

Più in generale, si ha $B = Id$ se e solo se la base scelta è ortonormale rispetto al prodotto scalare.

Quindi, se la base è ortonormale, allora

f simmetrica
migra nei
prodotti scalari

$\Leftrightarrow$ la matrice A associata è simmetrica

$$A = A^t$$

Fatto 1 Sia f simmetrica e siano λ e μ due autovalori di f diversi ($\lambda \neq \mu$). Siano v e w due autovettori corrispondenti. Allora

$$\langle v, w \rangle_B = 0$$

Dim. $\lambda \langle v, w \rangle_B = \langle \lambda v, w \rangle_B = \langle f(v), w \rangle_B =$

$\uparrow$ propr. prod. scal. $\uparrow$ v autov. λ autov. $\uparrow$ f simmetrica

$$= \langle v, f(w) \rangle_B = \langle v, \mu w \rangle_B = \mu \langle v, w \rangle_B$$

Abbiamo ottenuto che $\underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} \langle v, w \rangle_B = 0$, quindi per forza

$$\langle v, w \rangle_B = 0.$$

— 0 — 0 —

Procedendo come a suo tempo si arriva al

Teorema B-spettrale Sia V uno spazio vettoriale sul quale è definito un prodotto scalare definito positivo. Sia $f: V \rightarrow V$ un'applicazione lineare simmetrica. Allora esiste una base ortonormale composta da autovettori di f .

Oss. Rispetto a tale base

- la matrice che rappresenta f è diagonale e ha sulla diagonale gli autovalori di f
- la matrice che rappresenta il prodotto scalare è identica.

Stesso enunciato usando solo le matrici

Ipotesi: B matrice simmetrica def. positiva (rappresenta il prod. scalare)

A matrice (che rappresenta f) tale che $A^T B = B A$

questo dice che f è simmetrica.

Allora esiste una matrice di cambio di base M invertibile
(M : componenti base nuova $\rightsquigarrow$ componenti base vecchia)
tale che

$$\begin{aligned} M^{-1} A M &= D \leftarrow f \text{ nella base nuova, quindi diagonale} \\ M^t B M &= Id \leftarrow \text{prodotto scalare nella base nuova, che} \\ &\quad \text{è l'identità perché la base nuova è ortonormale.} \end{aligned}$$

Cosa succede se $B = Id$? Ipotesi: $A^t = A$

Tesi: $M^{-1} A M = D$

$$M^t M = Id$$

$\uparrow$ M matrice ortogonale

Osservazione Il teorema B-spettrale si enuncia talvolta come
teo. di diagonalizzazione simultanea, cioè punto con
 A e B opportuno e arrivo con 2 matrici diagonali:

$$\begin{aligned} M^{-1} A M &= D \leftarrow \text{Matrice di applicazione.} \\ M^t B M &= Id \leftarrow \text{Matrice di prodotto scalare.} \end{aligned}$$