

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 53

Titolo nota

13/12/2013

Prodotto scalare classico : $\langle x, y \rangle = x^t y$ pensavo x e y come colonne

Norma classica : $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = x^t x$

Prodotto scalare generale : $\langle x, y \rangle_B = x^t B y$

Forma quadratica : $q(x) = x^t B x$ (se $B = Id$, è la norma)
↑
simmetrica

Esempio in $\mathbb{R}^2$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2) \quad y = (y_1, y_2) \quad \langle x, y \rangle_B = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} y_1 + 2y_2 \\ 2y_1 - 3y_2 \end{pmatrix} \\ &= 1x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 3x_2y_2 \end{aligned}$$

Forma quadratica associata: posso $x=y$ e viene

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$$

Def. Dato uno spazio vettoriale V qualunque, un prodotto scalare su V è una funzione

$$b: \underbrace{V \times V}_{\text{input: coppie di vettori}} \rightarrow \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{output: numero reale}}$$

che verifica le seguenti proprietà:

- (i) $b(v, w) = b(w, v)$ per ogni $v \in V, w \in W$ (simmetria)
 - (ii) $b(v_1 + v_2, w) = b(v_1, w) + b(v_2, w)$ per ogni...
 - (iii) $b(\lambda v, w) = \lambda b(v, w)$ per ogni...
 - (iv) $b(v, w_1 + w_2) = b(v, w_1) + b(v, w_2)$...
 - (v) $b(v, \lambda w) = \lambda b(v, w)$...
- } Linearità nella 1ª variabile
} Linearità nella 2ª variabile.

Oss. (iv) e (v) seguono dalla simmetria e da (ii) e (iii).

Fatto fondamentale Se conosco il prodotto scalare tra vettori di una base qualunque di V , allora lo conosco per ogni coppia di vettori

Dim. nel caso in cui V ha dim 2 Sia $\{v_1, v_2\}$ una base di V .

Siano $x \in V$ e $y \in V$. Allora

$$x = av_1 + bv_2 \quad y = cv_1 + dv_2$$

Allora

$$\begin{aligned} b(x, y) &= b(av_1 + bv_2, cv_1 + dv_2) \\ &= b(av_1, cv_1 + dv_2) + b(bv_2, cv_1 + dv_2) \\ &= a b(v_1, cv_1 + dv_2) + b b(v_2, cv_1 + dv_2) \\ &= a c \underbrace{b(v_1, v_1)}_{\text{NOT}} + a d \underbrace{b(v_1, v_2)}_{\text{NOT}} + b c \underbrace{b(v_2, v_1)}_{\text{NOT}} + b d \underbrace{b(v_2, v_2)}_{\text{NOT}} \end{aligned}$$

Osservazione decisiva:

$$b(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b(v_1, v_1) & b(v_1, v_2) \\ b(v_2, v_1) & b(v_2, v_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Quindi un prodotto scalare qualunque si rappresenta sempre nella forma

$$b(x, y) = x^t B y$$

dove B è la matrice in cui l'elemento i, j è $b(v_i, v_j)$ cioè il prodotto scalare generalizzato tra 2 elementi qualunque della base, e x e y sono vettori pensati come componenti rispetto alla stessa base.

Esempio $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x] = \{a + bx + cx^2 : a, b, c \text{ sono in } \mathbb{R}\}$

Siano $p(x)$ e $q(x)$ due polinomi. Definisco il loro prodotto scalare come

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x) \cdot q(x) dx$$

Questo è un prodotto scalare perché verifica le 5 proprietà:

(i) la simmetria è ovvia

(ii)

$$\begin{aligned}\langle p_1(x) + p_2(x), q(x) \rangle &= \int_{-1}^1 [p_1(x) + p_2(x)] \cdot q(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 p_1(x) q(x) dx + \int_{-1}^1 p_2(x) q(x) dx \\ &= \langle p_1(x), q(x) \rangle + \langle p_2(x), q(x) \rangle\end{aligned}$$

Idem per la verifica delle altre.

Domanda: qual è la matrice B associata a questo prodotto scalare rispetto alla base $\{1, x, x^2\}$.

È la matrice che ha come elementi i prodotti scalari tra gli elementi della base

$$B = \begin{pmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle 1, x \rangle & \langle 1, x^2 \rangle \\ \langle x, 1 \rangle & \langle x, x \rangle & \langle x, x^2 \rangle \\ \langle x^2, 1 \rangle & \langle x^2, x \rangle & \langle x^2, x^2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Conseguenza: quanto fa $\langle \underbrace{a+bx+cx^2}_v, \underbrace{d+ex+fx^2}_w \rangle$?

Con la matrice diventa

$$\underbrace{(a \ b \ c)}_{\text{comp. di } v} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matrice risp.} \\ \text{alla base.}}} \underbrace{\begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix}}_{\substack{\text{componenti di } w \text{ rispetto alla base}}}$$

Esercizio Calcolare il prodotto scalare usando l'integrale e vedere che coincide con quello fatto usando la matrice.

La forma quadratiche associata al prodotto scalare dato è

$$q(p(x), p(x)) = \int_{-1}^1 [p(x)]^2 dx$$

Questa forma è ovviamente definita positiva perché è integrale di un quadrato.

Volevo si vedeva dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & + & \xrightarrow{P} & + & \xrightarrow{P} & + & \xrightarrow{P} & + \\ & \uparrow & & & & & & \\ \text{d'ufficio} & & \text{Det}_1 & & \text{Det}_2 & & \text{Det}_3 & \\ & & \text{"} & & \text{"} & & & \\ & & 2 & & \frac{4}{3} & & \frac{8}{15} - \frac{8}{27} & \\ & - & 0 & - & 0 & - & 0 & - \end{array}$$

$$3P = 3 \text{ autov.} + \\ = \text{def. pos.}$$

Una volta che abbiamo un prodotto scalare, e questo è definito positivo abbiamo le basi ortonormali.

Per ottenere le basi ortonormali, parto da una base qualunque e applico GS rispetto al prodotto scalare stesso.

Nell'esempio partiamo da $\{1, x, x^2\}$.

La ortogonalizziamo con GS.

$$w_1 = v_1 = 1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle_B}{\langle w_1, w_1 \rangle_B} w_1 = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \cdot 1 = x$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle_B}{\langle w_1, w_1 \rangle_B} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle_B}{\langle w_2, w_2 \rangle_B} w_2$$

$$= x^2 - \frac{\frac{2}{3}}{\text{"} 2} \cdot 1 - \frac{\text{"} 0}{\text{"} 0} \cdot x = x^2 - \frac{1}{3}$$

Conclusione: $\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ rispetto al prodotto scalare introdotto nell'esempio.

— 0 — 0 —