

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 52

Titolo nota

11/12/2013

Scorciatoie per il caso $n=2$

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad q(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

- Se $\text{Det } B < 0$, allora gli autovalori sono di segno $+$ e $-$, quindi la forma non è definita
- Se $\text{Det } B > 0$, allora gli autovalori possono essere $++$ o $--$ e guardando la traccia decido
 - se $\text{Traccia } B > 0$, allora sono $++$ (no def. positiva)
 - se $\text{Traccia } B < 0$, allora sono $--$ (no def. negativa)
- Se $\text{Det } B = 0$, allora c'è almeno un autovalore nullo e per sapere il segno del restante guardo la traccia (no semidef. positiva o semidefinita negativa)

ACHTUNG! Tutto questo vale solo per $n=2$.

Oss. Quando $\text{Det } B > 0$, allora la forma è

- def. positiva se sulla diagonale c'è almeno un numero positivo
- def. negativa " " " " " " " negativo

[Questo è sostanzialmente Sylvester applicato al 2×2 . Ci sono 2 modi di farlo  (1-2)  (2-1)]

$\begin{matrix} + & \pm & + \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{iniziale} & & \text{Det } (B) \end{matrix}$
a seconda dell'elemento scelto della diagonale

Se sulla diagonale c'è un tizio $+$, allora ho 2 permanenze, se c'è un tizio $-$, allora ho 2 variazioni]

[In alternativa: $\text{Det } B = \text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = ac - b^2$, quindi se $\text{Det } B > 0$, di sicuro i 2 termini sulla diagonale non sono $+$ e $-$].

Oss. Uno sulla diagonale non può essere nullo se $\text{Det } B > 0$.

Perché il segno degli autovalori ha a che fare con la segnatura

Prendiamo una forma quadratica $q(v) = v^t B v$
dove v è un vettore (colonna) di n componenti e
 B è una matrice $n \times n$ simmetrica.

Per il teorema spettrale B si diagonalizza mediante una matrice ortogonale

$$M^{-1} B M = D \quad B = M D M^{-1}$$

↑
diagonale

Essendo M ortogonale, abbiamo che $M^{-1} = M^t$, quindi

$$M^t B M = D, \quad \text{e anche} \quad B = M D M^t$$

Da questo ricavo che

$$q(v) = v^t B v = v^t M D M^t v = (M^t v)^t D (M^t v)$$

$$\text{Quindi } q(v) = \overbrace{(M^t v)^t}^{w^t} \underbrace{D}_{\substack{\uparrow \\ \text{nuova } B}} \overbrace{(M^t v)}^w = w^t D w$$

quindi calcolare $q(v)$ equivale a calcolare una forma quadratica con matrice diagonale non sul vettore v , ma sul vettore $M^t v$.

Esempio $q(x, y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\text{Det: } 8$ $\text{Tr: } 6$ $+, +$

Questa è definita positiva. Diagonalizzo B . Gli autovalori sono $\lambda = 2$ e $\lambda = 4$. Calcolo gli autospazi

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$3x + y = 2x$$

$$x + y = 0$$

$$(1, -1)$$

$$x + 3y = 2y$$

$$x + y = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 4y \end{pmatrix}$$

$$3x + y = 4x$$

$$x = y$$

$$(1, 1)$$

$$x + 3y = 4y$$

$$x = y$$

Quindi $(1, -1)$ e $(1, 1)$ è una base ortogonale di autovettori.
Ortonormalizzandola ottengo la base

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{da cui} \quad M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

↑
da nuova a canonica

$$M^{-1} B M = D$$

↑
l'inversa è la trasposta

Riprova

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Da $M^{-1} B M = D$ troviamo che $B = M D M^t$

quindi

$$\underbrace{(x \ y)}_{w^t} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_B \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_w = \underbrace{(x \ y) M}_{w^t} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}_D \underbrace{M^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_w$$

$$M^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} = w$$

Quindi

$$q(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} (x-y \ x+y) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{2} \left(2(x-y)^2 + 4(x+y)^2 \right) = (x-y)^2 + 2(x+y)^2$$

Essendo la matrice
diagonale, ho solo
termini puri

Conclusione Alla fine ho scritto $q(x, y)$ come somma di quadrati, in maniera diversa da quello che avrei fatto compiendo i quadrati.

I due termini che ho fatto al quadrato sono le componenti di (x, y) rispetto ad una nuova base ortonormale, più precisamente la base data dagli autovettori di B , cioè $\frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1)$ e $\frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1)$.

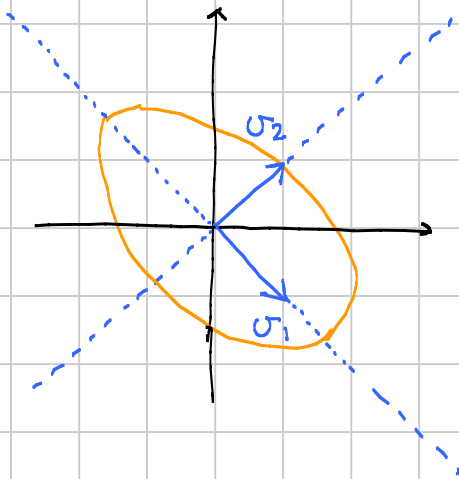
$$\left[\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{componenti rispetto} \\ \text{base canonica}}} \rightsquigarrow \underbrace{M^{-1} M^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\substack{\uparrow \\ \text{componenti rispetto alla} \\ \text{base nuova che sta nelle} \\ \text{colonne di } M}} \right]$$

Domanda: cosa rappresenta $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 25$ nel piano cartesiano?

Nella base nuova è come scrivere un'ellisse!

$$2x^2 + 4y^2 = 25, \text{ che è}$$

$\uparrow$ comp. risp. $\swarrow$ comp. risp.
 $2v_1$ $4v_2$



Diagonalizzando, restano solo termini puri! (rispetto ad una base strana).