

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 51

Titolo nota

11/12/2013

Esempio $x^2 - 4xy + y^2 + 3z^2 - 5xz = q(x, y, z)$

Al primo passo faccio fuori TUTTE le x

$$= \left(x - 2y - \frac{5}{2}z\right)^2 + y^2 + 3z^2 - 4y^2 - \frac{25}{4}z^2 - 2yz$$
$$\underbrace{x^2 + 4y^2 + \frac{25}{4}z^2}_{\text{...}} - \underbrace{4xy - 5xz}_{\text{...}} + 10yz$$

$$= \left(x - 2y - \frac{5}{2}z\right)^2 - 3y^2 - \frac{13}{4}z^2 - 10yz$$

Ora provo a sistemare y e z

$$= \left(x - 2y - \frac{5}{2}z\right)^2 - 3\left(y^2 + \frac{13}{12}z^2 + \frac{10}{3}yz\right)$$

$$= \left(x - 2y - \frac{5}{2}z\right)^2 - 3\left[\left(y + \frac{5}{3}z\right)^2 - \frac{25}{9}z^2 + \frac{13}{12}z^2\right]$$
$$\underbrace{y^2 + \frac{25}{9}z^2 + \frac{10}{3}yz}_{\text{...}} \quad -\frac{25}{9} + \frac{13}{12} = \frac{-100+39}{36} = -\frac{61}{36}$$

$$= \left(x - 2y - \frac{5}{2}z\right)^2 - 3\left(y + \frac{5}{3}z\right)^2 + \frac{61}{12}z^2$$

[Fare la verifica espandendo tutto ... e se i conti sono giusti ...]

La forma quadratica risulta non definita.

Se la voglio positiva posso prendere un termine puro: $q(1, 0, 0) = 1$

Se la voglio negativa posso prendere

$$\begin{cases} x - 2y - \frac{5}{2}z = 0 \\ y + \frac{5}{3}z = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Il sistema è per forza a scala perché ho eliminato una variabile per volta.

L'unico inghippo è che ad un certo punto possono restare solo termini misti!

Esempio $q(x,y) = xy$ $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

In questi casi si fanno comparire i quadrati così:

$$xy = \frac{1}{4} (x+y)^2 - \frac{1}{4} (x-y)^2$$

quindi i termini misti diventano diff. di quadrati.

Punto della situazione:

metodo 2: Ok, ma bisogna trovare gli autovalori, che per gradi alti è un problema

metodo 1: comodo anche in dim. alta, ma vuol dire "navigare a vista", quindi scomodo da programmare.

③ SYLVESTER Metodo dei MINORI ORLATI

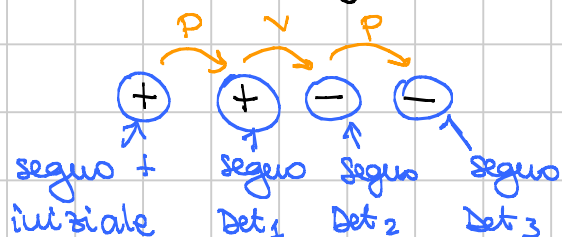
Esempio $x^2 - 4xy + y^2 + 3z^2 - 5xz$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{5}{2} \\ -2 & 1 & 0 \\ -\frac{5}{2} & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (1, 2, 3)$$

Calcolo il det dei 3 minori

$$\text{Det}_1 = 1, \quad \text{Det}_2 = -3, \quad \text{Det}_3 = 3 - \frac{25}{4} - 12 = -9 - \frac{25}{4} < 0$$

Ora scrivo un segno +, seguito dai segni dei 3 determinanti



Conto le permanenze e le variazioni di segno: 2 permanenze, 1 variazione
2 autov. + 1 autov. -

Oss. 1 - Come si ricorda Sylvester: pensare che la matrice sia diagonale. In questo caso il Det_k è il prodotto dei primi k autovalori: questo ha lo stesso segno di Det_{k-1} se e solo se il k -esimo autovalore è positivo.

2 - Quando NON funziona Sylvester?

Quando strada facendo trovo un $\text{Det} = 0$. In quel caso non posso concludere nulla.

3 - Posso procedere anche al contrario o anche in maniera più



complessa in questo modo: prendo una qualunque permutazione degli indici $(1, 2, \dots, n)$, ad esempio nel vostro caso $(2, 3, 1)$



$(3, 1, 2)$



In particolare, se non incontro zeri, il risultato non dipende dalla direzione presa.

Nell'esempio, il $(3, 1, 2)$ porta a fine

$$\text{Det}_1: 3$$

$$\text{Det}_2: 3 - \frac{25}{4}$$

$$\text{Det}_3: -3 - \frac{25}{4}$$

$$+ \xrightarrow{P} + \xrightarrow{P} - \xrightarrow{P} -$$

Esercizio Provare nell'esempio tutte le 6 possibili permutazioni.

— o — o —

④ **CARTESIO** Prendo il polinomio caratteristico della matrice.
 Sia questo $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_k\lambda^k$ dove $k \geq 0$ e $a_k \neq 0$.
 Allora

- il numero degli autovalori nulli è uguale a k .
- il numero degli autovalori $+$ è uguale al numero di variazioni di segno nella successione dei coeff. non nulli del polinomio caratteristico
- il numero degli autovalori $-$ è uguale a ciò che si ottiene per differenza.

Occhio: funziona anche se ci sono coeff. NULLI, basta non metterli nella successione.

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) - 3(2-\lambda) - 4(-1-\lambda) \\ &= -(2-3\lambda+\lambda^2)(\lambda+1) - 18+9\lambda+4+4\lambda \\ &= -2\lambda-2+3\lambda^2+3\lambda-\lambda^3-\lambda^2-14+13\lambda \\ &= -\lambda^3+2\lambda^2+14\lambda-16 \end{aligned} \quad (\lambda=0 \text{ non è soluz.})$$

A segno dei coeff. è: $\overset{+}{-} + \overset{+}{+} + \overset{-}{-}$: 2 autovalori $+$
 1 autovalore $-$

Se faccio con Sylvester: (3-2-1)

$$\text{Det}_1 = -1 \quad \text{Det}_2 = -2 \quad \text{Det}_3 = -16$$

$$+ \overset{+}{-} \overset{+}{-} \overset{+}{-}$$

2 permanenze = 2 autovalori $+$
 1 variazione = 1 autovalore $-$
 — 0 — 0 —