

FORME QUADRATICHE E PRODOTTI SCALARI

Forma quadratica È una somma di monomi di secondo grado in un po' di variabili.

Esempi $m=2$ $q(x,y) = 3x^2 - 6xy + 5y^2$
In generale $q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$

$m=3$ $q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz$
(si intende che x,y,z sono le variabili, e $a,b,\dots,f$ sono coeff. dati)

Def. Una forma quadratica si dice

- definita positiva se $q(x,y) > 0$ per ogni $(x,y) \neq 0$
- semidefinita positiva se $q(x,y) \geq 0$ per ogni (x,y)
- definita negativa se $q(x,y) < 0$ per ogni $(x,y) \neq 0$
- semidefinita negativa ... $q(x,y) \leq 0$...
- indefinita o non definita se esiste (x,y) t.c. $q(x,y) > 0$ ed esiste (x,y) t.c. $q(x,y) < 0$.

La definizione è del tutto analoga per forme che dipendono da più di 2 variabili.

Esempio 1 $q(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 = (x+y)^2 + y^2 \geq 0$ sempre e $q(x,y) = 0$ se e solo se $x+y=0$ e $y=0$, cioè se e solo se $x=y=0$. Quindi q è definita positiva (sempre > 0 per $(x,y) \neq (0,0)$).

Esempio 2 $q(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 \geq 0$ sempre e

$q(x,y) = 0$ se e solo se $y = -x$.

Quindi è semidefinita positiva: $q(x,y) \geq 0$ sempre, ma

$q(x,y)$ può fare 0 anche per $(x,y) \neq (0,0)$

(in questo caso $q(3,-3) = 0$)

Esempio 3 $q(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$. Osservazioni:

$$q(1,0) = 1$$

$$q(1,-1) = -1$$

} questi 2 valori sostituiti implicano che $q(x,y)$ è indefinita

Domanda: come stabilisco di che tipo è la forma?

Matrice associata ad una forma quadratica

Una forma quadratica, in un numero qualunque di variabili, si può sempre scrivere nella forma

$$q(v) = v^t B v$$

$\uparrow$ $\uparrow$
vettore matrice $n \times n$
di n variabili SIMMETRICA

Esempi $q(x,y) = x^2 + 3xy + 2y^2 = (x \ y) \begin{pmatrix} 1 & +\frac{3}{2} \\ +\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Più in generale

$$q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 = \underbrace{(x \ y)}_{v^t} \underbrace{\begin{pmatrix} a & +\frac{b}{2} \\ +\frac{b}{2} & c \end{pmatrix}}_B \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_v$$
$$(x \ y) \begin{pmatrix} ax + \frac{b}{2}y \\ +\frac{b}{2}x + cy \end{pmatrix}$$

$$ax^2 + \frac{b}{2}xy + \frac{b}{2}xy + cy^2$$

$$ax^2 + bxy + cy^2$$

Esempio $n=3$ $q(x,y,z) = x^2 - y^2 + 4z^2 - 2xy + 3xz - 6yz$

La matrice associata è:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & -1 & -3 \\ \frac{3}{2} & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & -1 & -3 \\ \frac{3}{2} & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

In questo caso la forma è indefinita. Basta osservare che $q(1,0,0) = 1$, $q(0,1,0) = -1$.

Osservazione Se ci sono termini puri con coeff. > 0 e termini puri con coeff. < 0 , allora di sicuro la forma è indefinita.

Esempio

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow q(x,y,z) = y^2 + 3z^2 - 4xz + 8yz$$

— 0 — 0 —

Metodi per stabilire la segnatura (cioè definita positiva, ...)

① Completamento dei quadrati

② Autovalori

③ SYLVESTER

④ CARTESIO

— 0 — 0 —

Metodo ②

Trovo gli autovalori della matrice B , che essendo simmetrica ha n autovalori reali, e contati con molteplicità.

Allora

- se sono tutti > 0 , la forma è definita positiva
- " " " ≥ 0 " " " semidefinita ~
- " " " < 0 " " " definita negativa
- " " " ≤ 0 " " " semidefinita ~
- se sono un po' e un po', la forma è indefinita.

Metodo ①

Ogni forma quadratica si può scrivere (in vari modi, non in modo unico) come somma o differenza di quadrati di termini linearmente indipendenti,

Esempi $x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$ SOMMA DI 2 QUADRATI

$x^2 + xy + \frac{y^2}{4}$

Una volta che è somma di 2 quadrati, è di sicuro ≥ 0 sempre, e vale 0 se e solo se $x + \frac{y}{2} = 0$ e $y = 0$, cioè se e solo se $x = y = 0$, quindi è definita positiva.

$$x^2 + 3xy + y^2 = \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{5}{4}y^2 \quad \text{DIFFERENZA DI 2 QUADRATI}$$

$x^2 + 3xy + \frac{9}{4}y^2$

Se lo voglio negativo, basta prendere $y = 1, x = -\frac{3}{2}$

Se lo voglio positivo, basta prendere $y = 0, x = 2$

$$x^2 + 3xy + y^2 = \underbrace{x^2 + 3xy + \frac{9}{4}y^2}_{\left(x + \frac{3}{2}y\right)^2} - \frac{5}{4}y^2 = \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 - \frac{5}{4}y^2$$

$$2x^2 + 3xy + y^2 = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{1}{2}y^2\right)$$

$$= 2\left(\underbrace{x^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{9}{16}y^2}_{\left(x + \frac{3}{4}y\right)^2} - \frac{9}{16}y^2 + \frac{1}{2}y^2\right)$$

$$= 2\left(x + \frac{3}{4}y\right)^2 - \frac{1}{8}y^2 \quad \text{NON DEFINITA}$$

Se la voglio negativa posso prendere $x = -\frac{3}{4}, y = 1$

In alternativa posso usare la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det: } 2 - \frac{9}{4} = -\frac{1}{4} < 0$$

$\Rightarrow$ autovalori: + e -.