

Classificazione delle isometrie in $\mathbb{R}^2$

Già visto: teorema di struttura che vale in $\mathbb{R}^n$ e dice che sono del tipo

$$Ax + b$$

↑
matrice ortogonale

Geometricamente la classificazione si basa sul luogo dei pti fissi, cioè sull'insieme dei pti $x \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$Ax + b = x$$

Trovarli si riduce al sistema lineare

$$(A - Id)x = -b$$

Ci sono 4 possibilità:

- nessuna soluzione
- soluzione unica (x_0, y_0)
- infinite soluz. dipendenti da un parametro (una retta)
- " " " " 2 parametri (tutto il piano)

Risaleudo all'isometria, abbiamo 4 casi:

- ① tutto il piano fisso: l'isometria è l'identità ($A = I, b = 0$)
- ② una retta fissa: l'isometria è la simmetria risp. a quella retta
- ③ un pto fisso: rotazione di un angolo θ rispetto al pto
- ④ → ④.1 traslazione ($A = Id, b \neq 0$)
 ↳ ④.2 simmetria risp. ad una retta + traslazione in direzione parallela alla retta stessa



Esempi di isometrie in $\mathbb{R}^3$

Volendo procedere con una classificazione analoga

- ① tutto $\mathbb{R}^3$ fisso: Identità ($A = Id$, $b = 0$)
- ② un piano fisso: simmetria rispetto al piano
- ③ una retta fissa: rotazioni di un certo angolo intorno alla retta
- ④ un pto fisso: rotazione rispetto ad una retta + simmetria rispetto ad un piano $\perp$ alla retta
- ⑤ nessun pto fisso:
 - ⑤.1 traslazioni
 - ⑤.2 simmetria risp. piano + traslazione lungo il piano
 - ⑤.3 rotazione intorno ad un asse + traslazione lungo l'asse.

Esempio 1 Scrivere la simmetria rispetto al piano di eq.

$$2x + y - 3z = 0.$$

1° modo Parto da $P = (x_0, y_0, z_0)$. Scrivo la retta per $P \perp$ al piano:
 $(x_0, y_0, z_0) + t(2, 1, -3)$.

Interseco retta e piano e trovo H (la proiezione di P sul piano)
(volevo $\|PH\|$ sarebbe la distanza di P dal piano).

A questo pto il simmetrico Q è il pto t.c. $\frac{P+Q}{2} = H$, cioè
 $Q = 2H - P$.

[Esercizio: svolgere i conti come prima in $\mathbb{R}^2$].

2° modo Scelgo una base di $\mathbb{R}^3$ $\{v_1, v_2, v_3\}$ con
 v_1 e v_2 appartenenti al piano e v_3 ortogonale al piano.
In tale base la simmetria è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

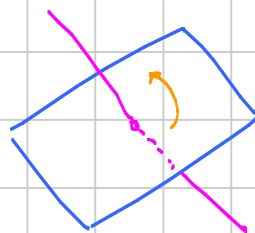
Una tale base è $v_1 = (1, -2, 0)$
 $v_2 = (0, 3, 1)$
 $v_3 = (2, 1, -3)$

Quindi la matrice della simmetria è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1}$$

Esercizio: capire ognuna di queste matrici cosa fa.

Esempio 2 Scrivere la matrice che rappresenta la rotazione di 90° rispetto alla retta per l'origine perpendicolare al piano $2x + y - 3z = 0$



Attenzione! Bisogna specificare il verso !!!

Diciamo verso antiorario per un osservatore che sta in piedi nel semispazio verso le z positive.

Problema molto più facile: ruotare di un angolo θ intorno all'asse z .
È fatta così

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{matrix}} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

ruota in (x,y)
z invariato

Il problema generale è lo stesso, solo in una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ con

- v_3 nella direzione della retta
- v_1, v_2 nel piano per l'origine $\perp$ alla retta e base ortonormale.

Operativamente trovo v_1, v_2, v_3 intanto ortogonali

$$\hat{v}_3 = (2, 1, -3)$$

$$\hat{v}_1 = (1, -2, 0)$$

Per v_2 applico GS (bancanizzazione) a partire da v_1

$$\hat{v}_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \quad (\text{viene da GS})$$

$$= (0, 3, 1) - \frac{\langle (0, 3, 1), (1, -2, 0) \rangle}{\langle (1, -2, 0), (1, -2, 0) \rangle} (1, -2, 0)$$

$$= (0, 3, 1) - \frac{-6}{5} (1, -2, 0) = (0, 3, 1) + \frac{6}{5} (1, -2, 0)$$

$$= \left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}, 1 \right)$$

Quindi la nuova base ortogonale è

$$v_1 = (1, -2, 0)$$

$$v_2 = \left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}, 1 \right)$$

$$v_3 = (2, 1, -3)$$

Ora devo renderli di norma 1 dividendo per le norme (radici...) e infine fare il cambio di base.

$$\left(v_1 \mid v_2 \mid v_3 \right) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(v_1 \mid v_2 \mid v_3 \right)^{-1}$$

rotazione di 90°

in base $\{v_1, v_2, v_3\}$

— 0 — 0 —

Esercizio Se A è matrice 3×3 ortogonale, allora almeno uno tra ± 1 è autovalore.

[Dim. Il pol. caratt. ha grado 3, quindi almeno una radice reale, quindi almeno 1 autovalore reale, e questo essendo A ortogonale può essere solo ± 1].