

Come scrivere la simmetria rispetto ad una retta passante per l'origine in $\mathbb{R}^2$.

1° modo "Con le mani". Sia (x_0, y_0) il punto di partenza. Scrivo la retta per (x_0, y_0) e $\perp$ alla retta r data.

In eq. parametrica diventa

$$(x_0, y_0) + t(a, b)$$

Interseco questa con r . Sostituisco la param. nell'eq. cartesiana di r :

$$a(x_0 + ta) + b(y_0 + tb) = 0$$

$$ax_0 + a^2t + by_0 + b^2t = 0 \leadsto (a^2 + b^2)t = -ax_0 - by_0$$

$$\leadsto t = -\frac{ax_0 + by_0}{a^2 + b^2}, \text{ quindi } H = (x_0, y_0) - \frac{ax_0 + by_0}{a^2 + b^2}(a, b)$$

Ora calcolo $Q = (x_1, y_1)$. Dovrà essere $H = \frac{P+Q}{2} = \left(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}\right)$

$$\frac{1}{2}(x_0, y_0) - \frac{ax_0 + by_0}{a^2 + b^2}(a, b) = \frac{1}{2}(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(x_1, y_1)$$

Quindi $(x_1, y_1) = (x_0, y_0) - 2 \frac{ax_0 + by_0}{a^2 + b^2}(a, b)$

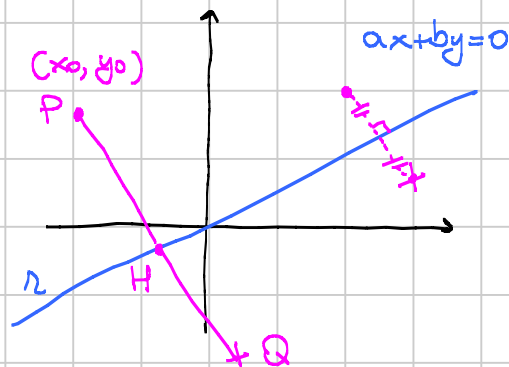
$$= \left(\frac{a^2x_0 + b^2x_0 - 2a^2x_0 - 2aby_0}{a^2 + b^2}, \frac{a^2y_0 + b^2y_0 - 2abx_0 - 2b^2y_0}{a^2 + b^2} \right)$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2} ((b^2 - a^2)x_0 - 2aby_0, (a^2 - b^2)y_0 - 2abx_0)$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & -(b^2 - a^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Matrice della simmetria: è del tipo

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$



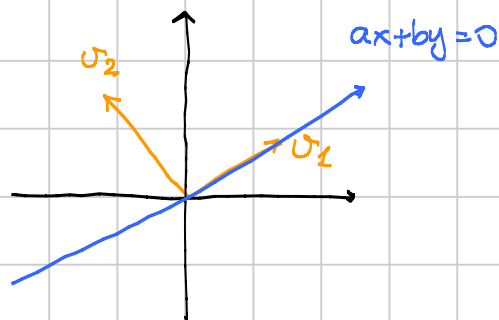
2° modo Prendo, invece della base canonica, una base ortogonale come in figura.

Ad esempio posso prendere:

$$v_1 = (-b, a) \quad v_2 = (a, b)$$

La simmetria S come funziona in questa base

$$\begin{aligned} S(v_1) &= v_1 \\ S(v_2) &= -v_2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Questo dice che } S \text{ è diagonalizzabile con} \\ \text{autovalori } \pm 1 \text{ e autovet. } v_1 \text{ e } v_2 \end{array} \right\}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} : \text{matrice di } S \text{ nella base } \{v_1, v_2\} \text{ in partenza e arrivo}$$

Se voglio la matrice di S nella base canonica basta che faccia il cambio di base

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}}_{\text{dalla nuova alla canonica}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -b & a \\ a & b \end{pmatrix}^{-1}}_{\text{dalla canonica alla nuova}}$$

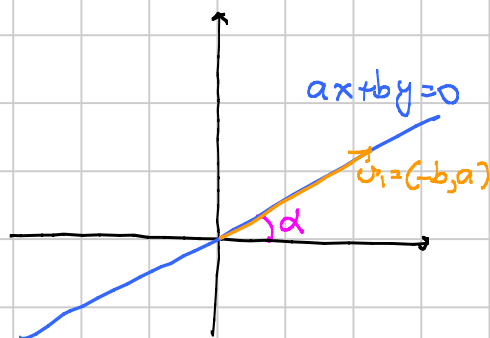
: S dalla canonica alla canonica

$$\frac{-1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} b & -a \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

Facendo il conto viene la stessa matrice di prima.

3° modo La matrice di una simmetria è del tipo

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{dove } \theta \text{ è il doppio dell'angolo } \alpha \text{ che la retta } r \text{ forma con l'asse } x.$$



Ora

$$\tan \alpha = -\frac{b}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\text{Quindi } \cos \theta = \cos(2\alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \frac{b^2}{a^2+b^2} - 1 = \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$$

$$\sin \theta = \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{-2ab}{a^2+b^2} \quad \text{Stesso risultato!}$$

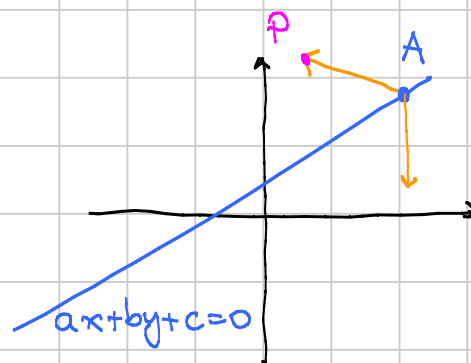
E se la retta non passa per l'origine?

1° modo Si ricicla allo stesso modo

Osservazione: calcolando $\|P-A\|$ si ottiene la formula per la distanza di un pto da una retta.

2° e 3° modo Scelgo un punto A sulla retta.

Poi per calcolarmi il simmetrico di un certo $P \in \mathbb{R}^2$, faccio nell'ordine



- $P \rightsquigarrow P-A$
- simmetrico di $P-A$
- aggiungo nuovamente A

$$\text{Quindi } \text{Simm}(P) = A + \text{Simm}(P-A)$$

Per trovare un punto A della retta sostituisco per esempio $x=0$ e trovo

$$A = (0, -\frac{c}{b})$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{c}{b} \end{pmatrix}}_A + \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}}_{\text{matrice di prima in funzione di } a \text{ e } b} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y + \frac{c}{b} \end{pmatrix}}_{\substack{P-A \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}}$$

Simmetria rispetto alla
retta $ax+by+c=0$

Esercizio Controllare che venga lo stesso risultato nei 2 modi

Esercizio Quali sono gli autovalori di una rotazione nel piano?

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} = 1$$

$$\text{Tr} = 2\cos\theta$$

Se gli autovalori sono reali, allora sono del tipo $\lambda, \frac{1}{\lambda}$.
D'altra parte vale il

FATTO GENERALE Se una matrice ortogonale ha autovalori reali, allora questi sono ± 1 .

Dim. Se A è ortogonale, allora $\|Av\| = \|v\|$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, cioè A conserva le norme. Sia λ un autovalore e sia v un suo autovettore. Allora

$$\begin{aligned}\|Av\| &= \|v\| \\ \| \lambda v \| & \\ |\lambda| \cdot \|v\| &\end{aligned}$$

Semplificando $\|v\|$ (che è $\neq 0$ perché gli autovettori non possono essere nulli) ottengo $|\lambda| = 1$, cioè $\lambda = \pm 1$.
— 0 —

Quindi ci sono 2 possibilità per autovalori reali di una rot.

- ① $\lambda = \frac{1}{\lambda} = 1$, ma allora è l'identità, cioè $\theta = 0$
- ② $\lambda = \frac{1}{\lambda} = -1$, ma allora è $-$ Identità, cioè $\theta = \pi$ (180°)

In tutti gli altri casi gli autovalori sono complessi coniugati $\alpha \pm i\beta$.
Ma allora $\text{Traccia} = 2\alpha$, quindi $\alpha = \cos\theta$ e quindi $\beta = \sin\theta$.

In tutti i casi gli autovalori di una rotazione sono $\cos\theta \pm i \sin\theta$,
quindi volendo sui complessi è diagonalizzabile. $e^{i\theta}$

Oss. Basta cambiare un segno e si ottiene $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$
che ha come autovalori $+1$ e -1 sempre!!!