

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 47

Titolo nota

04/12/2013

Isometrie in $\mathbb{R}^2$

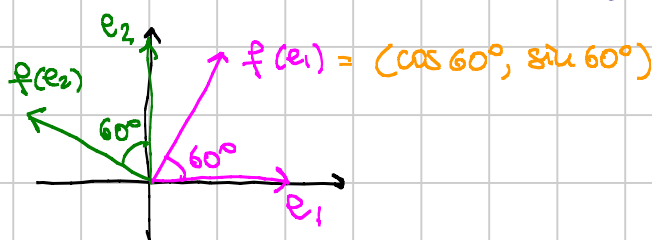
Esempio 1 Scrivere la trasformazione che rappresenta la rotazione di 60° rispetto all'origine. ↑ antioraria

Con il senso di poi $f(x) = Ax$ con $A = \begin{pmatrix} \boxed{\cos 60^\circ} & \boxed{-\sin 60^\circ} \\ \boxed{\sin 60^\circ} & \boxed{\cos 60^\circ} \end{pmatrix}$

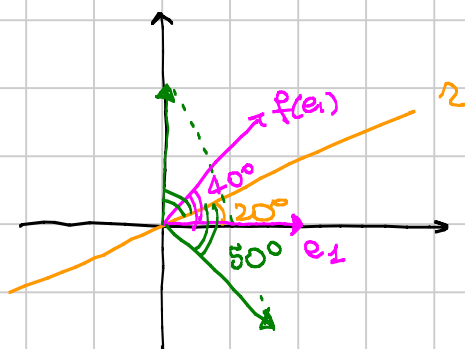
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

In componenti $f(x, y) = \frac{1}{2} (x - \sqrt{3}y, \sqrt{3}x + y)$

Copiaamo meglio:



Esempio 2 Scrivere la simmetria rispetto alla retta che passa per l'origine e forma un angolo di 20° con il semiasse positivo delle x .

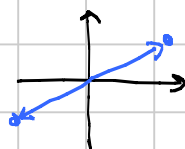


$$\begin{pmatrix} \cos 40^\circ & \sin 40^\circ \\ \sin 40^\circ & -\cos 40^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 40^\circ & \sin 40^\circ \\ \sin 40^\circ & -\cos 40^\circ \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
 sarebbe
 $\cos(-50^\circ)$
 $\sin(-50^\circ)$

Esempio 3 Scrivere la simmetria centrale rispetto al punto $P = (2, 3)$

Se fosse rispetto all'origine sarebbe $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$
 quindi con matrice associata $-\text{Id}$



Rispetto ad un punto P .

Strategia

$$x \rightsquigarrow (x-P) \rightsquigarrow \text{capovolgo}$$

aggiungo di nuovo P

$$x \rightsquigarrow x-P \rightsquigarrow P-x \rightsquigarrow 2P-x$$

Componendo ottengo $f(x) = 2P-x = -\text{Id} \cdot x + 2P$

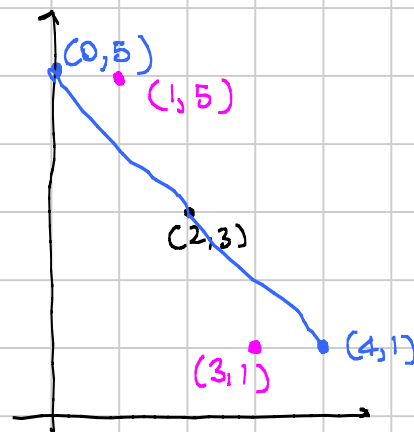
In componenti

$$f(x, y) = (-x, -y) + (4, 6) = \boxed{(-x+4, -y+6)}$$

Controlliamo $f(4, 1) = (0, 5)$

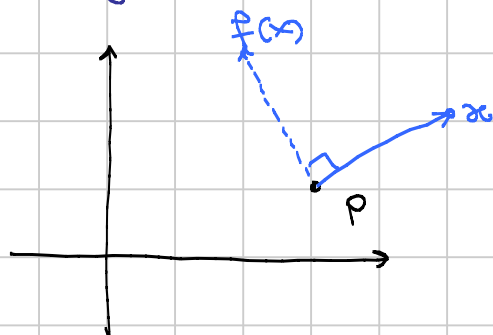
$$f(3, 1) = (1, 5)$$

Nota bene: matrice $-\text{Id}$ = rotazione di 180°



Esempio 4 Scrivere l'applicazione che rappresenta la rotazione di 90° rispetto al punto $(3, 1) = P$.

Strategia: $x \rightsquigarrow x-P \rightsquigarrow$ ruoto di $90^\circ \rightsquigarrow$ aggiungo di nuovo P



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

↓
tolgo P rotazione di 90° aggiungo P

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+1 \\ x-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+4 \\ x-2 \end{pmatrix}$$

$$f(x, y) = (-y+4, x-2)$$

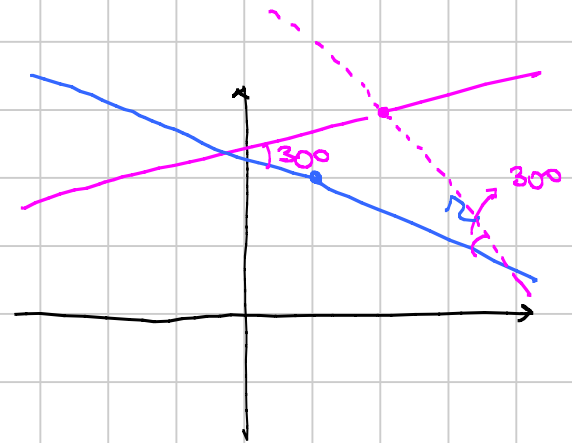
Controllino: $f(5, 2) = (2, 3)$ ed è ragionevole.

Esempio 3 Consideriamo la retta r di eq. parametrica
 $(1, 2) + t(5, -3)$

Domanda: scrivere la retta che passa per $(2, 3)$ e forma un angolo di 30° rispetto alla precedente.

I punti base non interverranno, almeno non subito.

Quello che conta sono i vettori direzione.



IL VETTORE DIREZIONE DELLA NUOVA

RETTA È QUELLO VECCHIO RUOTATO DI 30°

($0 - 30^\circ$ SE VOGLIO QUELLA TRATTEGGIATA)

$$\begin{aligned} \text{Nuovo vett. direz.} &= \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{3}+3}{2} \\ \frac{5-3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'eq. parametrica della nuova retta sarà

$$\begin{pmatrix} 2, 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{5\sqrt{3}+3}{2}, \frac{5-3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2, 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5\sqrt{3}+3, 5-3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

↑ Nuovo punto base

↑ posso moltiplicare il vettore direzione per una costante.

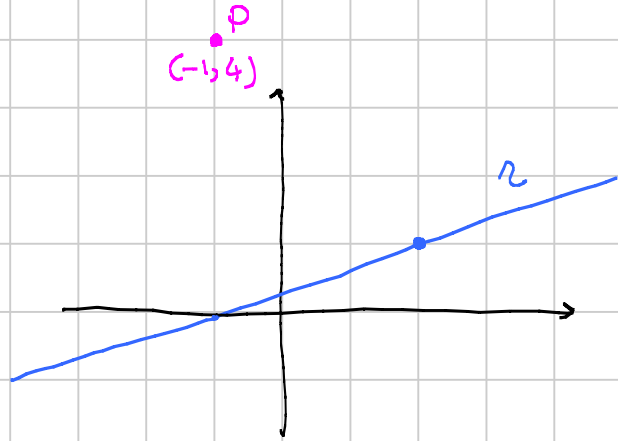
Esempio 6 Consideriamo la retta $r: (2,1) + t(3,1)$.

Facciamo la rotazione di -45° rispetto al punto $(-1,4)$.

Dove va a finire r ?

Basta scrivere la trasformazione che rappresenta la rotazione voluta

$x \rightsquigarrow x-p \rightsquigarrow \text{ruoto} \rightsquigarrow \text{aggiungo } P$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} x+1 \\ y-4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-4 \end{pmatrix}}_{\text{ruoto } (x-p)} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{aggiungo } P}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} x+y-3 \\ -x+y-5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1, -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{5\sqrt{2}}{2} + 4 \right)}_{\text{rotazione di } -45^\circ \text{ intorno al punto } (-1,4)}$$

Se voglio sapere dove finisce la retta r devo sostituire

(x,y) con $(2+3t, 1+t)$. Ottengo:

$$\left(\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}t - \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1, -\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}t + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}t - \frac{5\sqrt{2}}{2} + 4 \right)$$

Volendo lo scrivo del tipo $\underbrace{(A,B)}_{\text{nuovo pto base}} + t \underbrace{(C,D)}_{\text{nuova direzione}}$