

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 46

Titolo nota

04/12/2013

Isometrie

Def. Una funzione qualsunque $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice ISOMETRIA se conserva le distanze, cioè se

$$\text{dist}(f(x), f(y)) = \text{dist}(x, y)$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Teorema Le isometrie di $\mathbb{R}^n$ sono tutte sole le affinità

$$f(x) = Ax + b$$

con A matrice $n \times n$ ortogonale.

Dim. Fatto 1 Tutte le affinità con matrice ortogonale sono isometrie.

Devo dim. che $\text{dist}(f(x), f(y)) = \text{dist}(x, y)$, cioè

$$\text{dist}(Ax+b, Ay+b) = \text{dist}(x, y)$$

Posso elevare al quadrato e ottengo la stessa

$$\begin{aligned} \text{dist}^2(Ax+b, Ay+b) &= \|(Ax+b) - (Ay+b)\|^2 \\ &= \|A(x-y)\|^2 \\ &= \langle A(x-y), A(x-y) \rangle \\ &= [A(x-y)]^t A(x-y) \\ &= (x-y)^t \boxed{A^t A} (x-y) \end{aligned}$$

Id perché A è ortogonale

$$\begin{aligned} &= (x-y)^t (x-y) \\ &= \langle x-y, x-y \rangle \\ &= \|x-y\|^2 \\ &= \text{dist}^2(x, y). \end{aligned}$$

$\langle v, w \rangle = v^t w$

Oss. C'è sotto questo fatto ancora più generale:
se A è ortogonale, allora $\|Au\| = \|u\|$.

Infatti

$$\|Au\|^2 = \langle Au, Au \rangle = (Au)^t (Au) = u^t \underline{A^t A} u = u^t u = \langle u, u \rangle = \|u\|^2$$

Fatto 2 Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un'isometria, e in aggiunta $f(0)=0$,
allora f conserva le norme, cioè
 $\|f(x)\| = \|x\|$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\|f(x)\| = \text{dist}(f(x), 0) \underset{f(0)=0}{=} \text{dist}(f(x), f(0)) \underset{f \text{ isometria}}{=} \text{dist}(x, 0) = \|x\|$$

Fatto 3 Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un'isometria, e in aggiunta $f(0)=0$,
allora f conserva i prodotti scalari, cioè
 $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$

Si parte dall'identità di polarizzazione:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2} (\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$$

~~$\|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle - \|u\|^2 - \|v\|^2$~~

La applico con $u = f(x)$ e $v = f(y)$

$$\begin{aligned} \langle f(x), f(y) \rangle &= \frac{1}{2} (\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) \\ &\quad \quad \quad \uparrow \\ &= \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

... vediamo dopo ...

Fatto 4 Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è isometria, e in aggiunta $f(0)=0$, allora $f(x) = Ax$ con A ortogonale.

Prendo la base canonica $e_1, \dots, e_n$ di $\mathbb{R}^n$. Per i fatti precedenti abbiamo che $f(e_1), \dots, f(e_n)$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$
 $\bar{e}_1 \quad \bar{e}_n$

Infatti

- se $i \neq j$, allora $\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = \langle f(e_i), f(e_j) \rangle \stackrel{\text{def.}}{=} \stackrel{\text{Fatto 3}}{=} \stackrel{\text{base canonica}}{=} \langle e_i, e_j \rangle = 0$
- se $i = j$, allora $\langle \bar{e}_i, \bar{e}_i \rangle = \langle f(e_i), f(e_i) \rangle = \langle e_i, e_i \rangle = 1$.

Ma allora sia x un vettore qualunque. Allora

$$x = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n$$

con $c_i = \langle x, e_i \rangle$ (fatto generale sui coeff quando la base è ortogonale)

Analogamente $f(x) = a_1 \bar{e}_1 + \dots + a_n \bar{e}_n$ dove $a_i = \langle f(x), \bar{e}_i \rangle$

Ma

$$a_i = \langle f(x), \bar{e}_i \rangle = \langle f(x), f(e_i) \rangle \stackrel{\text{Fatto 3}}{=} \langle x, e_i \rangle = c_i$$

Ma allora abbiamo dimostrato che

$$x = c_1 e_1 + \dots + c_n e_n \implies f(x) = c_1 f(e_1) + \dots + c_n f(e_n)$$

quindi f è lineare, e la matrice corrispondente è ortogonale perché manda la base canonica $e_1, \dots, e_n$ nella base ortogonale $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$.

Fatto 5 Se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è isometria, allora $f(x) = Ax + b$ con A ortogonale.

Pongo $g(x) = f(x) - f(0)$. È facile vedere che $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è isometria e $g(0) = 0$. Per il fatto 4 ho che $g(x) = Ax$ con A ortogonale, quindi $f(x) = g(x) + f(0) = Ax + \underbrace{f(0)}_b$

Back to Fatto 3 Dal fatto 2 sappiamo che f conserva le norme.

$$\|f(x) - f(y)\|^2 = \|x - y\|^2 \quad \text{perché conserva le distanze}$$

$$\|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 - 2\langle f(x), f(y) \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle$$

Ho semplificato perché conserva le norme e ottengo

$$\underbrace{\langle f(x), f(y) \rangle}_{= \langle x, y \rangle} = \underbrace{\langle x, y \rangle}_{= \langle x, y \rangle}, \quad \text{cioè conserva i prodotti scalari.}$$

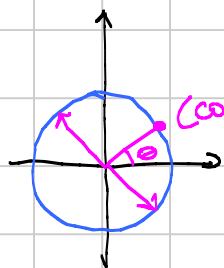
Isometrie di $\mathbb{R}^2$ $f(x) = Ax + b$ con A matrice 2×2 ortogonale.

Come sono fatte le 2×2 ortogonali?

Le colonne devono essere ortonormali

$$\begin{pmatrix} * \\ * \end{pmatrix}$$

sewe vettore di norma 1, cioè sulla circ. trigonometrica, cioè del tipo $(\cos \theta, \sin \theta)$



$$\leadsto \begin{pmatrix} \cos \theta & * \\ \sin \theta & * \end{pmatrix}$$

deve essere $\perp$ al prec. e sulla circ. trigonometrica

Ho 2 possibilità

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Le possibili matrici ortogonali su $\mathbb{R}^2$ sono del tipo

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ Ae_1 $\uparrow$ Ae_2

ROTAZIONE DI ANGOLO θ rispetto all'origine

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

SIMMETRIA

RISPETTO ALLA RETTA CON ANGOLO $\frac{\theta}{2}$.

