

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 45

Titolo nota

04/12/2013

Geometria affine - Trasformazioni affini - Isometrie

$\mathbb{R}^n$ spazio vettoriale. Sottospazi vettoriali "passano per l'origine" e sono del tipo $\text{Span} \{ \underbrace{u_1, \dots, u_k}_{\uparrow \text{lin. indep.}} \} = \{ c_1 u_1 + \dots + c_k u_k : c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R} \}$

$\mathbb{R}^n$ spazio affine. Sottospazi affini sono come i sottospazi vett. solo che non passano necessariamente per l'origine.

In generale, un sottospazio affine di dim. k di $\mathbb{R}^n$ si presenta nella forma

$$\underbrace{w_0}_{\text{p.to base}} + \underbrace{c_1 u_1 + c_2 u_2 + \dots + c_k u_k}_{\text{sott. vett. detto GIACITURA del sottosp. affine}}$$

dove $u_1, \dots, u_k$ sono vettori di $\mathbb{R}^n$ lin. indep., $c_1, \dots, c_k$ sono numeri reali qualunque, $w_0 \in \mathbb{R}^n$ è un "punto base" fissato

Esempi $n=2$ $k=1$ otteniamo $w_0 + c_1 u_1$ $w_0 \in \mathbb{R}^2, u_1 \in \mathbb{R}^2$
 $\uparrow$
libero

è la parametrizzazione di una retta in $\mathbb{R}^2$ $\vec{p}_0 + t \vec{u}$

La giacitura della retta sarebbe la parallela alla retta stessa passante per l'origine, pensata come sottosp. vett. di $\mathbb{R}^2$.

$n=3$ $k=1$ otteniamo $w_0 + c_1 u_1$ $w_0 \in \mathbb{R}^3, u_1 \in \mathbb{R}^3$
 $\vec{p}_0 + t \vec{u}$

$n=3$ $k=2$ otteniamo $w_0 + c_1 u_1 + c_2 u_2$ $w_0 \in \mathbb{R}^3, u_1 \in \mathbb{R}^3, u_2 \in \mathbb{R}^3$
 $\vec{p}_0 + t \vec{u} + s \vec{w}$
 $\uparrow \quad \uparrow$
parametri

$\vec{u}$ e $\vec{w}$ sono una base della giacitura del sottosp. affine.

Def. Due sottospazi affini della stessa dimensione sono paralleli se hanno la stessa giacitura o coincidenti

Se hanno dim. diversa sono paralleli (o uno contenuto nell'altro) se la giacitura di quello di dim. + grande contiene l'altra giacitura.

— o — o —

Trasformazioni affini Un'applicazione $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ si dice affine se è del tipo

$$f(x) = Ax + b$$

dove A è una matrice $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$,

$$m \cdot \boxed{\text{matrice}} \cdot \boxed{\text{vettore}} = \boxed{\text{vettore}}$$

Oss. La composizione di due trasformazioni affini è ancora una trasformazione affine.

$$f(x) = A_1 x + b_1 \quad g(x) = A_2 x + b_2$$

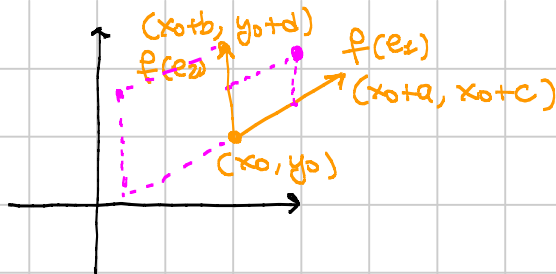
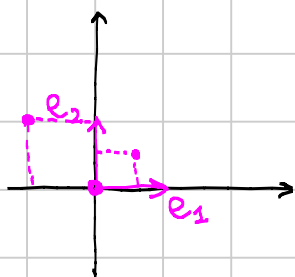
$$\begin{aligned} g(f(x)) &= A_2 (f(x)) + b_2 = A_2 (A_1 x + b_1) + b_2 \\ &= \boxed{A_2 A_1} x + \boxed{A_2 b_1 + b_2} \\ &= A_3 x + b_3 \end{aligned}$$

Esercizio Chiarire bene "da dove a dove" sono definite $f(x)$ e $g(x)$ e le dim. delle matrici e dei vettori coinvolti.

Esempio $f(x) = Ax + p \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad p = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + x_0 \\ cx + dy + y_0 \end{pmatrix}$$



Stabilito dove finiscono l'origine e la base canonica, ho stabilito dove finiscono tutti gli altri punti.

Esempio $f(x, y) = (2x + 3y + 1, x - y + 2)$

Scritta in termini di matrici $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Domande:

- dove finisce $(1, -3)$? Sostituisco $\leadsto (-6, 6)$
- dove finisce la retta $(2, 1) + t(1, 0)$?

Basta sostituire la parametrizzazione della retta nell'affinità

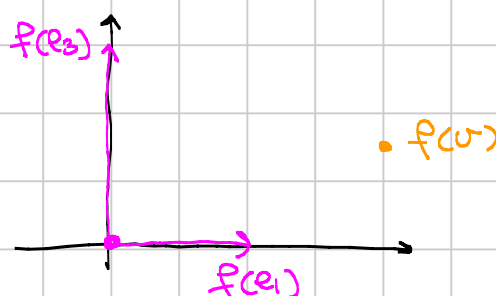
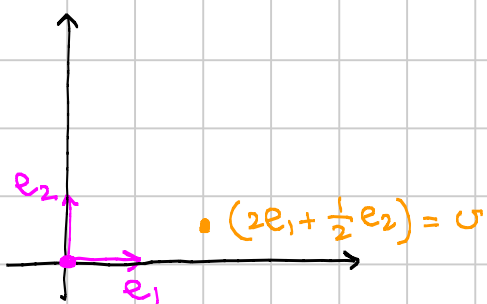
$$(2+t, 1) \leadsto \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+t \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2t+3 \\ 2+t-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8+2t \\ 3+t \end{pmatrix} = (8, 3) + t(2, 1)$$

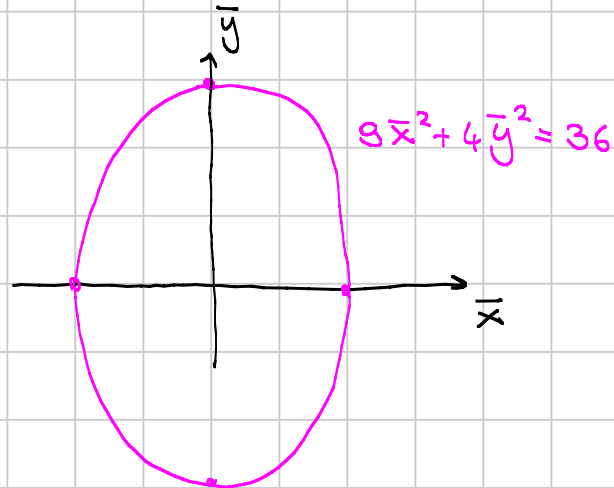
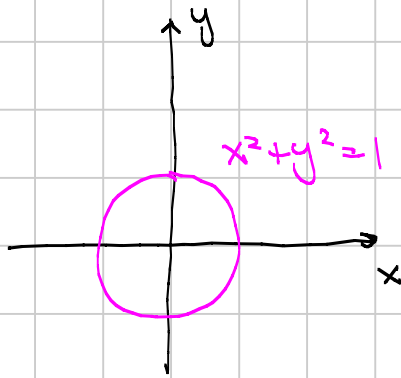
Casi particolari

- $A = \text{identità} \leadsto f(x) = x + p \leadsto \text{traslazione di } p$
- $A = \lambda \cdot \text{identità}, p = 0 \leadsto f(x) = \lambda x \leadsto \text{omotetia di fattore } \lambda$
- $A = \text{matrice diagonale}, p = 0 \leadsto \text{gli assi vanno negli assi, ma con un fattore di dilatazione diverso su ogni asse}$

in $\mathbb{R}^2$ $f(x, y) = (2x, 3y)$



La circonferenza con centro nell'origine $x^2 + y^2 = 1$ va a finire in un'ellisse



$$\bar{x} = 2x$$

$$\bar{y} = 3y$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x = \frac{1}{2} \bar{x}$$

$$y = \frac{1}{3} \bar{y}$$

sostituisco e trovo

$$\frac{1}{4} \bar{x}^2 + \frac{1}{9} \bar{y}^2 = 1, \quad 9\bar{x}^2 + 4\bar{y}^2 = 36$$

• A = 2 Identità $p \neq 0$ $f(x) = 2x + p$

Quale p.to resta fisso? $f(x) = x$, cioè $2x + p = x$, cioè $x = -p$

$$f(x) = 2x + p = 2(x + p) - p$$

$f(x)$ = simetria di fattore
2 rispetto al
punto $-p$

