

FORMA CANONICA DI JORDAN

Def. Un blocco di jordan $k \times k$ è una matrice fatta così:

- un numero λ sulla diagonale
- tutti 1 sopra
- tutto il resto 0.

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}_{k \times k}$$

Esempi

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2×2

$$(5)$$

$\uparrow$
 1×1

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

3×3

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3×3 con $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
 3×3 con $\lambda = 1$

In un blocco di jordan $k \times k$ ci sono $k-1$ uni.

Def. Una matrice di JORDAN è una matrice ottenuta collegando sulla diagonale dei blocchi di jordan di varie dimensioni.

Il resto sono zeri. Il numero λ sulla diagonale dei vari blocchi può essere uguale o diverso a seconda del blocco.

Esempi Una matrice diagonale è una matrice di jordan con tutti blocchi 1×1 .

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Teorema (Forma di Jordan su $\mathbb{C}$).

Ogni matrice A $n \times n$ (a coeff. reali o complessi) è simile ad una matrice di Jordan, cioè esiste M t.c.

$$M^{-1} A M = J \leftarrow \text{matrice alla JORDAN.}$$

Ovviamente chi compare sulla diagonale sono gli autovalori.

Una matrice A a coeff. reali è simile ad una matrice di Jordan se e solo se ha tutti gli autovalori reali.

Esempio $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = A$ $\text{Tr}(A) = 4$ $\text{Det}(A) = 4$
Autovalori: 2, 2

Quindi diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C} \Leftrightarrow m_a = 2 = m_g$

$$A - 2\text{Id} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{rank } 1 \rightsquigarrow m_g = 1 \rightsquigarrow \text{no adatto diag.}$$

Tuttavia, essendo gli autovalori reali, sarà Jordanizzabile su $\mathbb{R}$, quindi esiste M t.c.

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sulla diagonale deve esserci 2, 2.

Se fossero 2 blocchi da 1 sarebbe diagonalizzabile, quindi è 1 blocco da 2.

Come trovo la base Jordanizzante (e quindi M). Sarà del tipo $\{v, w\}$, dove

$$Av = 2v \quad (\text{quindi } v \text{ è l'autovettore di } 2)$$

$$Aw = 2w + v \quad (\text{e noto } v \text{ questo si risolve}).$$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = B$$

Abbiamo visto che non è diagonalizzabile. Ora sappiamo che è Jordanizzabile su $\mathbb{R}$ e diventa

$$\begin{array}{|cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array}$$

Forma di Jordan reale Sia A una matrice $n \times n$ reale.

Allora si jordanizza in $\mathbb{C}$.

Ora i blocchi con λ reale vanno bene anche su $\mathbb{R}$.

I blocchi con λ "veramente in $\mathbb{C}$ " vengono a coppie (se c'è un blocco con λ c'è un blocco della stessa dimensione con $\bar{\lambda}$).

Posso sostituire questi 2 blocchi $k \times k$ con un unico blocco $2k \times 2k$ fatto così ($\lambda = a + ib$)

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 & & \\ -b & a & 0 & 1 & & \\ & & a & b & 1 & 0 \\ & & -b & a & 0 & 1 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a & b \\ & & & & & -b & a \end{pmatrix}$$

Invece di k volte λ e k volte $\bar{\lambda}$

ho k volte $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$

Invece dei k uni ripetuti 2 volte ho k volte $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Teorema Ogni matrice reale si può portare nella forma di Jordan reale (cioè con blocchi normali con un numero reale sulla diagonale o con i blocchi fatti da sottoblocchetti 2×2).

Esempio $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = A \quad P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 7 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

$$= (1-\lambda)(3-\lambda) + 14 = \lambda^2 - 4\lambda + 17$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-17} = 2 \pm \sqrt{-13} = 2 + i\sqrt{13}$$

Su $\mathbb{C}$ la matrice A è diagonalizzabile, dunque esiste M complessa b.c.

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 2+i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2-i\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Questa è anche la jordanizzazione complessa (2 blocchi da 1, uno è il coniugato dell'altro).

Sui reali la forma canonica è $\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$, cioè esiste una matrice M reale b.c.

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$$

Esempi di passaggio da jordan $\mathbb{C}$ a jordan in $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{cc|cc} \boxed{1+2i} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1+2i} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{1-2i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1-2i} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \\ -2 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & -2 & \boxed{1} \end{array}$$

Qual è il polinomio caratteristico di questa matrice?

Deve essere (intanto lo stesso per tutte e 2...)

$$\begin{aligned} [\lambda - (1+2i)]^2 [\lambda - (1-2i)]^2 &= [(\lambda - \overbrace{1-2i}^{A-B}) (\lambda - \overbrace{1+2i}^{A+B})]^2 \\ &= (\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4)^2 = (\lambda^2 - 2\lambda + 5)^2 \\ &\quad \text{---o---o---} \end{aligned}$$

Esempio Una matrice reale A ha polinomio caratteristico

$$P_A(\lambda) = (\lambda^2 + 4)(\lambda + 3)$$

Chi è la forma canonica di A ?

$$\text{su } \mathbb{C}: \begin{pmatrix} \boxed{-3} & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}$$

$$\text{su } \mathbb{R}: \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$