

Fatto 4 (meno semplice) Se A è una matrice simmetrica, allora A ammette almeno un autovalore reale.

Dando per buono il fatto 4, il teorema spettrale segue per induzione.

$n=1$ Banale

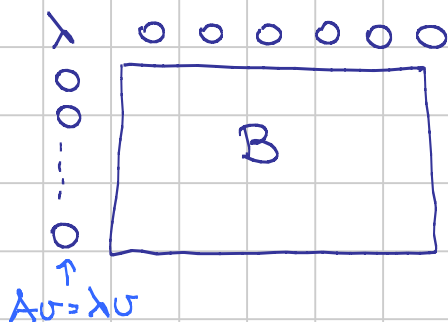
Passaggio induttivo $n-1 \rightarrow n$ Ipotesi: ogni matrice $(n-1) \times (n-1)$ simmetrica si diagonalizza

Tesi: stessa cosa per matrici $n \times n$.

Sia A $n \times n$ simmetrica. Per il Fatto 4, A ammette almeno un autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$. Sia v un corrispondente autovettore, cioè $Av = \lambda v$, che posso assumere di norma 1.

Prendo una base in cui il primo vettore è v e i restanti $n-1$ vettori sono perpendicolari a v , cioè stanno in quello che nel fatto 3 si chiamava W : $\{v, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}\}$

Cosa diventa A in questa nuova base?



Le colonne dopo la prima sono $Aw_1, Aw_2, \dots, Aw_{n-1}$ e tutti questi vettori sono $\perp$ a v , quindi hanno la prima componente uguale a zero.

Resta una matrice B $(n-1) \times (n-1)$ che è ancora simmetrica perché rappresenta la restrizione di A al sottospazio W . Per ipotesi induttiva, B si diagonalizza.

Fatto 4.1

Se A è una matrice reale, anche non simmetrica, e $\lambda \in \mathbb{C}$ è autovalore e v è autovettore $Av = \lambda v$, allora $\bar{\lambda}$ è ancora autovalore e $\bar{v}$ è il corrispondente autovettore.

↑
vettore che ha come componenti i coniugati delle componenti

[Dim.] $\overline{Av} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda} \bar{v} = A \bar{v}$. Quindi se $Av = \lambda v$, faccio il coniugato a dx e sx e ottengo

$\overline{Av} = \overline{\lambda v} = \bar{\lambda} \bar{v} = A \bar{v}$, da cui $A \bar{v} = \bar{\lambda} \bar{v}$, quindi $\bar{\lambda}$ è autovalore e $\bar{v}$ è un corrispondente autovettore

Fatto 4.2

$\langle v, \bar{v} \rangle$

$$v = (z_1, \dots, z_n) \quad \bar{v} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n), \text{ quindi}$$

$$\langle v, \bar{v} \rangle = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + \dots + z_n \bar{z}_n = |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \neq 0 \text{ se } v \neq 0$$

[Dim. fatto 4] Sia A reale e simmetrica, e sia λ autovalore. Allora λ è reale.

Infatti, sia v un autovettore corrispondente (non so che λ e v siano reali per ora).

$$\lambda \langle v, \bar{v} \rangle = \langle \lambda v, \bar{v} \rangle = \langle Av, \bar{v} \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso simm.}}}{=} \langle v, A \bar{v} \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{4.1}}}{=} \langle v, \bar{\lambda} \bar{v} \rangle = \bar{\lambda} \langle v, \bar{v} \rangle$$

Ho ottenuto che $\lambda \langle v, \bar{v} \rangle = \bar{\lambda} \langle v, \bar{v} \rangle$, cioè

$(\lambda - \bar{\lambda}) \langle v, \bar{v} \rangle = 0$. Quindi per forza $\lambda = \bar{\lambda}$, e dunque λ è reale.
≠ 0 per fatto 4.2 e perché autovettori non possono essere nulli

Punto della situazione:

A simmetrica
 $\Updownarrow$
base ortonormale di autovettori
 $\Updownarrow$
diagonalizzabile con M ortogonale
 $M^t A M = D$
 $M^t = M^{-1}$

Tutto questo avviene sui
reali

A diagonalizzabile su $\mathbb{R}$
 $\Updownarrow$
base di autovettori su $\mathbb{R}$
 $\Updownarrow$
 $M^{-1} A M = D$ (M matrice reale)
 $\Updownarrow$
tutti gli autovalori sono reali
e hanno mult. alg. = mult. geom.
 $\Uparrow$ Non quella opposta
tutti gli autovalori sono reali
e DISTINTI

A diagonalizzabile su $\mathbb{C}$
 $\Updownarrow$
base di autovettori in $\mathbb{C}$
 $\Updownarrow$
 $M^{-1} A M = D \rightarrow$ complesse
 $\Updownarrow$
tutti gli autovalori hanno
mult. alg. = mult. geom.
 $\Uparrow$
tutti gli autovalori sono
DISTINTI.

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = A$$

A è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$? Sì, autovalori reali e distinti: 1, 7, 5
" " " " $\mathbb{C}$? Ovvio dal precedente

A è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale? No perché
per il te. spettrale dovrebbe essere simmetrica

In particolare esiste una base di autovettori, che però non sarà
ortonormale. Trovarla è semplice: $A v = v$, $A v = 7v$, $A v = 5v$

Esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = B$$

È diagonalizzabile in $\mathbb{R}$?
È diagonalizzabile in $\mathbb{C}$?

Autovalori: 2, 2, 5. Autovalore 5 ha mult. algebrica 1, e
quindi mult. geom. = 1 ($1 \leq m_g \leq m_a$)

Autovalore $\lambda=2$ ha mult. algebrica 2. $m_g(2) = \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow 2 \end{matrix}$

Ora $m_g(2) = \dim \ker(A - 2I) = 3 - \text{rang}(A - 2I)$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \leftarrow \text{rang} = 2, \text{ quindi } m_g = 1$$

$\Rightarrow$ ADDIO DIAGONALIZZABILITÀ

— 0 — 0 —

TRIANGOLARIZZAZIONE

A è triangolarizzabile $\Leftrightarrow \exists M$ t.c. $M^{-1}AM = T$ ↑ triangolare superiore

- Teorema**
- Una matrice reale A è triangolabile, addirittura mediante una matrice ortogonale, se e solo se ha tutti gli autovalori reali.
 - Una matrice complessa A è sempre triangolabile.

Oss. Ovviamente quando triangolizzo chi finisce sulla diagonale sono gli autovalori.