

Teorema spettrale

Def. Una matrice A quadrata $n \times n$ si dice simmetrica se $A = A^t$

Esempi

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 7 & -2 \\ 7 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Praticamente: posso mettere quello che voglio sulla diagonale nel triangolo superiore, e a quel punto sono costretto a ricopiarlo nel triangolo inferiore

Fatto semplice L'insieme delle matrici $n \times n$ simmetriche è un sottospazio vettoriale di dimensione

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

[Dim: quanti parametri posso scegliere

$$\begin{array}{ccccccc} n + & (n-1) + & (n-2) + & \dots + & 1 & & \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & & \\ 1^{\text{a}} \text{ riga} & 2^{\text{a}} \text{ riga} & 3^{\text{a}} \text{ riga} & & \text{ultima riga} & & \end{array} = \frac{n(n+1)}{2}$$

2° modo: posso scegliere tutta la diagonale
+ metà dei rimanenti

$$\begin{array}{l} \leadsto n \\ \leadsto \frac{n^2 - n}{2} \end{array}$$

Sommando: $n + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$]

Matrici simmetriche e prodotto scalare

Una matrice A è simmetrica se e solo se

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle \quad \text{per ogni scelta di } u \text{ e } v$$

Prodotto scalare, vettori riga e vettori colonna

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_m y_m = (x_1 \dots x_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = u^t v$$

Fare il prodotto scalare tra 2 vettori colonna u e v è equivalente a fare $u^t v$ oppure $v^t u$.

Quindi

$$\langle Au, v \rangle = (Au)^t v = \boxed{u^t A^t v}$$

$$\langle u, Av \rangle = \boxed{u^t A v}$$

Se $A = A^t$, allora per forza $\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle$.

In realtà vale anche il viceversa, cioè se

$$u^t A^t v = u^t A v$$

per ogni u e v , allora per forza $A = A^t$.

— o — o —

TEOREMA SPETTRALE Sia A una matrice simmetrica.

Allora A è diagonalizzabile mediante una base ortonormale.

Vale anche il viceversa, cioè se A è diagonalizzabile mediante una base ortonormale, allora A è simmetrica.

Detto in altro modo: A è simmetrica $\Leftrightarrow \exists M$ ortogonale ($M^{-1} = M^t$)

tale che $\underbrace{M^{-1} A M}_{M^t A M} = \text{Diagonale}$

Nota: diagonalizzabile sui REALI

Conseguenza Sia A una matrice reale simmetrica. Allora

- ① tutti gli autovalori di A sono reali e hanno mult. algebrica uguale alla molteplicità geometrica.
- ② possiamo trovare una base ortogonale fatta di autovettori
— 0 — 0 —

Fatto 1 (semplice) Se A si diagonalizza mediante matrice ortogonale, allora A è simmetrica.

Dim. per ipotesi esiste M ortogonale (cioè $M^{-1} = M^t$) t.c.

$$M^{-1} A M = D \leftarrow \text{diagonale}$$

o meglio

$$M^t A M = D.$$

Da qui ottengo che $A = M D M^{-1} = M D M^t$. Ma allora

$$A^t = (M D M^t)^t = \underbrace{(M^t)^t}_{\ddot{M}} \underbrace{D^t}_{\ddot{D}} M^t = M D M^t = A$$

Fatto 2 (semplice) Se A è simmetrica, allora autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali.

Dim.: Siano λ e μ due autovalori distinti $\lambda \neq \mu$ e siano v e w autovettori corrispondenti, cioè

$$A v = \lambda v$$

$$A w = \mu w.$$

Allora

$$\begin{aligned} \lambda \langle v, w \rangle &= \langle \lambda v, w \rangle = \langle A v, w \rangle = \langle v, A w \rangle \\ &\quad \uparrow \text{prop. prod. scalare} \quad \uparrow A v = \lambda v \quad \uparrow \text{SIMMETRIA} \\ &= \langle v, \mu w \rangle = \mu \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

Ho così ottenuto che $\lambda \langle v, w \rangle = \mu \langle v, w \rangle$, cioè

$$\underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} \langle v, w \rangle = 0. \quad \text{Quindi l'unica possibilità è che sia } \langle v, w \rangle = 0.$$

Fatto 3 (un po' meno semplice). Sia A ortogonale, sia λ un autovalore, e sia u un autovettore, cioè $Au = \lambda u$. Sia W l'insieme dei vettori ortogonali a u . Allora $Aw \in W$ per ogni $w \in W$, cioè A manda vettori ortogonali a u in vettori ortogonali a u .

Dim. Sia $w \in W$, cioè $\langle w, u \rangle = 0$.

Voglio dimostrare che $Aw \in W$, cioè che $\langle Aw, u \rangle = 0$.

Ma

$$\langle Aw, u \rangle \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{SIMMETRIA}}}{=} \langle w, Au \rangle \stackrel{\substack{\uparrow \\ u \text{ autovett.}}}{=} \langle w, \lambda u \rangle = \lambda \langle w, u \rangle = 0$$

— 0 — 0 —