

# ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 41

Titolo nota

29/11/2013

## MOLTEPLICITÀ

Def. Sia  $\lambda$  un autovalore di  $A$ . Allora

- la molteplicità algebrica  $m_a(\lambda)$  = molteplicità di  $\lambda$  come radice di  $P_A(\lambda)$
- la molteplicità geometrica  $m_g(\lambda)$  = dim. autospazio  
 $= \dim(\ker(A - \lambda I))$   
 $= n - \text{rank}(A - \lambda I)$

Teorema Si ha sempre che  $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$ .

Conseguenza Se  $A$  ha  $n$  autovalori distinti, allora tutti gli autovalori hanno  $m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1$ .

Teorema Autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

Conseguenza Se  $A$  ha  $n$  autovalori distinti, allora  $A$  è diagonalizzabile.

[ Dim.: siano  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  gli autovalori. Siano  $v_1, \dots, v_n$  autovettori corrispondenti (cioè  $Av_i = \lambda_i v_i$ ).

Questi sono  $n$  e sono dim. indep., quindi sono una base. Usando la base  $\{v_1, \dots, v_n\}$  in partenza ed arrivo  $A$  diventa diagonale ].

Oss. Se gli autovalori non sono distinti, allora non è detto che  $A$  sia diagonalizzabile.  
Per esempio

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$P_A(\lambda) = (\lambda - 7)^2$  che ha come radici  $\lambda = 7$  di molteplicità 2, quindi  $m_a(7) = 2$

$$\text{mg}(7) = \dim(\ker(A - 7I)) = \dim(\ker\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = 1$$

Se  $A$  fosse diagonalizzabile, sulla diagonale dovrebbero esserci gli autovalori, cioè  $7$  e  $7$ , ma allora verrebbe dire che esiste una base composta da autovettori di  $7$ , ma allora l'autospazio dovrebbe avere dim  $2$ , il che non è.

Teorema  $A$  è diagonalizzabile se e solo se per ogni suo autovalore  $\lambda$  si ha  $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ .

**ACHTUNG!** Gli autovalori possono stare in  $\mathbb{C}$  oppure in  $\mathbb{R}$ .

- Se stanno tutti in  $\mathbb{R}$  c'è speranza di diagonalizzare in  $\mathbb{R}$ , cioè

$$M^{-1} A M = D$$

$\nwarrow$  matrici reali       $\nearrow$  diagonale in  $\mathbb{R}$

- Se invece gli autovalori stanno solo in  $\mathbb{C}$ , allora si può al più diagonalizzare in  $\mathbb{C}$ , cioè

$$M^{-1} A M = D$$

$\nwarrow$  matrici complesse       $\nearrow$  diagonale in  $\mathbb{C}$

Esempio 1  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ . Chi sono gli autovalori?

$$\text{somma autov.} = \text{Tr}(A) = 7$$

$$\text{prod. autov.} = \text{Det}(A) = 12$$

$$\text{Autovalori: } \lambda = 3 \text{ e } \lambda = 4 \Rightarrow \text{diagonalizzabile su } \mathbb{R}$$

Trovo gli autovettori  $Av = 3v$        $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2x - y = 3x \\ 2x + 5y = 3y \end{cases} \quad \begin{cases} -x - y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Una possibilità è  $\boxed{(1, -1)}$

$$Av = 4v \rightsquigarrow \begin{cases} 2x - y = 4x \\ 2x + 5y = 4y \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \boxed{(1, -2)}$$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$  Manda componenti base nuova  $\leadsto$  comp. base vecchia

Quindi

$$M^{-1} A M = D$$

$$M^{-1} = -1 \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Esempio 2  $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = B$

$$P_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 + 9 = \lambda^2 - 2\lambda + 10$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-10} = 1 \pm \sqrt{-9} = 1 \pm 3i \rightarrow \text{autovalori complessi distinti}$$

$\rightarrow$  diagonalizzabile su  $\mathbb{C}$

Quindi esiste una matrice  $M$  t.c.

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} 1+3i & 0 \\ 0 & 1-3i \end{pmatrix}$$

$M$  come prima si ottiene dagli autovettori, che però saranno complessi

$$A v = (1+3i)v \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+3i)x \\ (1+3i)y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+3y = (1+3i)x \\ -3x+y = (1+3i)y \end{cases} \quad \begin{cases} -3ix+3y=0 \\ -3x-3iy=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=ix \\ x+iy=0 \end{cases} \leadsto \boxed{(1, i)}$$

$$\begin{cases} x+3y = (1-3i)x \\ -3x+y = (1-3i)y \end{cases} \quad \begin{cases} 3ix+3y=0 \\ -3x+3iy=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-ix \\ -x+iy=0 \end{cases} \leadsto \boxed{(1, -i)}$$

Osservazione Se una matrice reale ha autovalori complessi, allora

- gli autovalori complessi sono coniugati a coppie,
- i corrispondenti autovettori sono coniugati a coppie.

La diagonalizzazione su  $\mathbb{C}$  è data dal cambio di variabili

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \quad M^{-1} = -\frac{1}{2i} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{pmatrix}$$

Controllare per esercizio che  $M^{-1} A M = \text{Diagonale prevista.}$   
— o — o —

Dim. che  $m_a(\lambda) = m_g(\lambda) \Rightarrow$  diagonalizzabilità

Dim. ind.

Per ogni autovalore, posso trovarmi tanti autovettori<sup>↑</sup> quanta è la sua molteplicità geometrica.

Visto che  $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$  per ogni  $\lambda$ , in questo modo ho che

$$\sum_{\lambda} m_g(\lambda) = \sum_{\lambda} m_a(\lambda) = n$$

↑ in un polinomio la somma delle molteplicità delle radici fa il grado

Quindi ho trovato esattamente  $n$  autovettori  $v_1, \dots, v_n$ .

Avrei finito se fossero Dim. indip.

Suppongo che non lo siano, quindi esiste una comb. lin.

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$$

Raggruppando tutti quelli che sono relativi allo stesso autovalore trovo una somma del tipo

$$w_1 + \dots + w_k = 0$$

Questi sono relativi ad autov. diversi, quindi sono nulli:  $w_1 = \dots = w_k = 0$

Ora si conclude osservando che  $w_1 = 0 \Rightarrow$  tutti i coeff.

dei  $v_i$  confluiti in  $w_1$  sono nulli e così via.

— o — o —