

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 40

Titolo nota

29/11/2013

Forme canoniche $\leadsto$ forma diagonale $\leadsto$ autovalori ed autovettori
 $\leadsto$ polinomio caratteristico.

Teorema (proprietà del polinomio caratteristico)

Sia A una matrice $n \times n$ e sia $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ il suo polinomio caratteristico.

Allora valgono i seguenti fatti.

- (1) Se A è simile a B , allora $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$ (quindi il polinomio caratteristico dipende dall'applic. lin. e non dalla matrice particolare che lo rappresenta)
- (2) Le radici di $p_A(\lambda)$ sono tutti e soli gli autovalori di A (quindi due matrici simili hanno gli stessi autovalori)
- (3) Il termine di grado max di $p_A(\lambda)$ è $(-1)^n \lambda^n$,
- (4) Il termine noto di $p_A(\lambda)$ è $\det(A)$,
- (5) Il coeff. di λ^{n-1} nel polinomio caratteristico è $(-1)^{n+1}$ moltiplicato per la traccia della matrice A (la traccia di una matrice quadrata è la somma degli elementi sulla diagonale).

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ $p_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -1 & 5-\lambda \end{pmatrix}$
 $\text{Tr } A = 1+5 = 6$
$$\begin{aligned} &= (1-\lambda)(5-\lambda) + 3 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 5\lambda + 5 + 3 \\ &= \lambda^2 - 6\lambda + 8 \end{aligned}$$

$\uparrow$ $\text{Tr}(A)$ $\uparrow$ $\det(A)$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad p_B(\lambda) = \lambda^2 - 9\lambda + 9$$

$\uparrow$ $\text{Tr } B$ $\uparrow$ $\det B$

Chi sono gli autovalori di A ?

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4) \quad \text{Autovalori: } \lambda = 2 \text{ e } \lambda = 4$$

Fatto generale] È sempre vero che

$$\text{tr}(A) = \text{somma degli autovalori di } A$$

$$\det(A) = \text{prodotto degli autovalori di } A$$

Dim. Segue da proprietà generali dei polinomi:

se il polinomio è MONICO (cioè il coeff. del termine di grado max è 1), allora

- somma radici = - coeff. del termine successivo a quello di grado max. = - coeff. di x^{n-1}
- prodotto radici = $(-1)^n$ ↑ termine noto.
grado

Esempio $x^{37} - 12x^{36} + \dots + 20x - 7$ allora

$$\text{somma radici} = 12$$

$$\text{prod. radici} = (-1)^{37} \cdot (-7) = 7$$

Achtung! Quando si parla di somma o prodotto delle radici si intende che

- stiamo parlando delle n radici COMPLESSE
- ogni radice si conta ripetuta a seconda della sua molteplicità.

Oss. Se il polinomio non è monico in partenza, basta renderlo tale dividendo per il coeff. di x^n .

Occhio che i polinomi caratteristici sono monici solo se n è pari, altrimenti bisogna cambiare i segni.

[Dim. del fatto polinomiale

$n=2$ Se a e b sono le radici, $p(x) = (x-a)(x-b)$
 $= x^2 - (a+b)x + ab$

$n=3$ $p(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - \underbrace{(a+b+c)}_{\text{somma radici}} x^2 + \underbrace{(ab+bc+ca)}_{\text{prod. radici}} x - abc$

Il caso generale è analogo.]

Oss. Dal teorema iniziale segue anche che due matrici simili hanno

- stesso polinomio caratteristico
- stessi autovalori
- stesso determinante
- stessa traccia

Oss. Senza passare dal teo. iniziale è facile vedere che
 A simile a $B \Rightarrow \det(A) = \det(B)$

[Dim. A simile a B vuol dire $B = MAM^{-1}$, quindi
 $\det(B) = \det(MAM^{-1}) = \det(M) \cdot \det(A) \cdot \det(M^{-1}) = \det(A)$]
 $\uparrow$ BINET $\frac{1}{\det(M)}$

Dim. teo. iniziale

(1) Sia A simile a B , cioè $B = MAM^{-1}$. Allora

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) \\ &= \det(MAM^{-1} - \lambda I) \\ &= \det(MAM^{-1} - \lambda MIM^{-1}) \\ &= \det M(A - \lambda I)M^{-1} \\ &= \det M \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det M^{-1} \\ &= \det M \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \frac{1}{\det M} \\ &= \det(A - \lambda I) = P_A(\lambda) \end{aligned}$$

(2) Dim. volta precedente [$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$
 $\Rightarrow \exists v \neq 0$ t.c. $Av - \lambda v = 0$
 $\Rightarrow \lambda$ autovalore].

(4) Termine noto di $P_A(\lambda) = P_A(0) = \det(A - 0 \cdot I) = \det A$

(3) Vogliamo si dimostri per induzione.

Vero per matrici 1×1 e per matrici 2×2 .

Passando da $n-1$ ad n :

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Se lo sviluppo rispetto alla 1ª riga ottengo

$$(a_{11} - \lambda) \det \begin{pmatrix} a_{22} - \lambda & \dots \\ \dots & a_{33} - \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix} + \boxed{\text{numero} \cdot \det(\text{matrice con } n-2 \text{ } \lambda \text{ in giro})}$$

$$= (a_{11} - \lambda) \cdot \left[\underbrace{(-1)^{n-1} \lambda^{n-1}}_{\text{per ipotesi induttiva}} + \text{roba} \right]$$

il grado di tutto ciò è
al max $n-2$

+ roba di grado $\leq n-2$

$$= (-1)^n \lambda^n + \text{roba di grado} \leq (n-1)$$

(5) Per la traccia è induzione simile.

Vero per matrici 1×1 e 2×2

e quando passo da $n-1$ ad n sviluppando come sopra i termini di grado $(n-1)$ resta solo

$$(a_{11} - \lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} a_{22} - \lambda & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11} - \lambda) \left((-1)^{n-1} \lambda^{n-1} + (-1)^n \text{Tr} \lambda^{n-2} \right) + \text{roba} \dots$$

svolgendo i conti resta $(-1)^n (a_{11} + \text{Tr})$

$$= (-1)^n (a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots)$$

— o — o — o —