

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 39

Titolo nota

27/11/2013

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Calcolare A^{2013} . Servirebbe una scorciatoia per evitare di moltiplicare 2013 volte.

Se A fosse diagonale sarebbe banale

Fatto generale Se $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, allora $A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

[Si dimostra facilmente per induzione su k a partire da un fatto ancora più generale: il prodotto di 2 matrici diagonali è la matrice diagonale ...]

Ora sappiamo che $M^{-1}AM = D \leftarrow \text{diagonale}$, ma allora

$$M^{-1}A^2M = \underbrace{M^{-1}AM}_{D} \underbrace{M^{-1}AM}_{D} = D^2. \text{ Analogamente}$$

$$M^{-1}A^3M = \underbrace{M^{-1}AM}_{D} \underbrace{M^{-1}AM}_{D} \underbrace{M^{-1}AM}_{D} = D^3 \text{ e in generale}$$

$$M^{-1}A^kM = D^k. \text{ Ma allora}$$

$$M^{-1}A^{2013}M = D^{2013} = \begin{pmatrix} 2^{2013} & 0 \\ 0 & 3^{2013} \end{pmatrix} \text{ e quindi}$$

$$A^{2013} = \underbrace{M}_{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \underbrace{D^{2013}}_{\begin{pmatrix} 2^{2013} & 0 \\ 0 & 3^{2013} \end{pmatrix}} \underbrace{M^{-1}}_{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

Definizione Data A matrice $n \times n$ si definisce polinomio caratteristico di A il polinomio

$$p(\lambda) = \text{Det}(A - \lambda \text{Id})$$

Viene sempre un polinomio di grado n nella variabile λ .

Teorema λ è autovalore di $A \Leftrightarrow \lambda$ è una radice del polinomio caratteristico.

Dim. λ è autovalore di $A \Leftrightarrow$ (definizione di autovalore)
 $\exists v \neq 0$ t.c. $Av = \lambda v \Leftrightarrow$ (ovvietà)
 $\exists v \neq 0$ t.c. $Av - \lambda v = 0 \Leftrightarrow$ (ovvietà)
 $\exists v \neq 0$ t.c. $(A - \lambda Id)v = 0 \Leftrightarrow$
 $\ker(A - \lambda Id) \neq \{0\} \Leftrightarrow$
 $\dim(\ker(A - \lambda Id)) \geq 1 \Leftrightarrow$
 $\dim(\operatorname{Im}(A - \lambda Id)) \leq n-1 \Leftrightarrow$
 $\det(A - \lambda Id) = 0$, cioè λ è radice del polinomio caratteristico.

Osservazione Quando sappiamo che λ è autovalore, gli autovettori li cerchiamo risolvendo $Ax = \lambda x$, cioè $(A - \lambda Id)x = 0$, cioè cerchiamo il $\ker$ di $A - \lambda Id$, che è non banale perché $\operatorname{rang}(A - \lambda Id) \leq n-1$.

Corollario Una matrice $n \times n$ ha al massimo n autovalori
— 0 — 0 —

Supponiamo che una matrice $n \times n$ abbia esattamente n autovalori reali distinti. Allora, se i corrispondenti autovettori fossero lin. indep., la matrice sarebbe diagonalizzabile.

Fatto generale Autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti

Quindi n autovalori reali distinti $\Rightarrow$ diagonalizzabile

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile, cioè esiste M matrice 4×4 invertibile t.c. $MA M^{-1} = \text{Diagonale}$.

Infatti $\text{Det}(A - \lambda \text{Id}) = (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda) = \text{pol. caratt.}$,
 $\uparrow$
 $\text{Det triangolare sup} =$
 $\text{prodotto elem. sulla diagonale}$

quindi gli autovalori son $\lambda = 1, 2, -1, 3$. Questi avranno degli
autovalori che usati come base diagonalizzano la matrice,
— 0 — 0 —

MOLTEPLICITÀ

Molteplicità della radice di un polinomio. Sia $p(x)$ un polinomio e
sia α una sua radice (reale o complessa), cioè $p(\alpha) = 0$.
Allora per il teorema di Ruffini si ha che $p(x)$ è divisibile per $(x-\alpha)$
cioè

$$p(x) = (x-\alpha) \underbrace{q(x)}_{\uparrow \text{polinomio}}$$

Si dice molteplicità di α il più grande intero m t.c. $p(x)$ è
divisibile per $(x-\alpha)^m$, cioè l'esponente di $(x-\alpha)$ nella fattoriz-
zazione di $p(x)$.

Fatto generale Un polinomio di grado n si scrive sempre come
prodotto di n fattori di 1° grado su $\mathbb{C}$

$$p(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \dots (x-\alpha_n)$$

dove $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono le radici, eventualmente complesse, di $p(x)$.
Le radici potrebbero non essere tutte distinte: una radice compare
tante volte quante è la sua molteplicità.

Def. Si definisce molteplicità algebrica di un autovalore la
sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico.
Si definisce molteplicità geometrica di un autovalore
la dimensione del suo autospazio, cioè
 $\dim(\ker(A - \lambda \text{Id}))$.

Oss. La molteplicità algebrica e quella geometrica sono ≥ 1 .

Oss. Se una matrice ha n autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distinti, allora le molteplicità algebriche sono tutte uno e quelle geometriche pure, perché ho almeno n autovettori corrispondenti $v_1, \dots, v_n$ e questi sono già una base.

— 0 — 0 —