

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 38

Titolo nota

27/11/2013

Autovalori e autovettori

Def. Sia V uno sp. vettoriale, e sia $f: V \rightarrow V$ un'applic. lineare
↑ stesso spazio

Si dice che un numero $\lambda \in K$ è AUTOVALORE di f se esiste $v \in V$ tale che $v \neq 0$ e

$$f(v) = \lambda v$$

Oss. Se consentissi di usare $v = 0$, allora tutti i λ sarebbero autovalori!!

Def. Se λ è autovalore, allora

- tutti i $v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda v$ si dicono autovettori relativi all'autovalore λ
- più in generale, l'insieme $\{v \in V : f(v) = \lambda v\}$ si dice autospatio relativo a λ .

Oss. L'autospatio contiene tutti gli autovalori più lo 0.

Inoltre l'autospatio è un sottospazio vettoriale (facile verifica)

$$\text{[se } f(v_1) = \lambda v_1 \text{ e } f(v_2) = \lambda v_2, \text{ allora } f(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2) \text{]}$$

$$\text{Se } f(v) = \lambda v \text{ e } a \in K, \text{ allora } f(av) = a f(v) = a \lambda v = \lambda(av) \text{]}$$

Oss. Supponiamo che v sia autovettore di f e supponiamo che v sia incluso in una base di $V = \{ \dots, v, \dots \}$.

Allora la corrispondente colonna della matrice associata ad f sarà

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

↑
 $f(v)$

cioè con tutti 0 e un solo valore λ nella posizione in cui la colonna incontra la diagonale.

Oss. Se una base fosse fatta da tutti autovettori, anche con autovalori diversi, la matrice sarebbe **DIAGONALE** con sulla diagonale i corrispondenti autovalori.

Domanda: come trovare autovalori e autovettori?

Oss. Cosa vuol dire che 0 è autovalore?

Vuol dire che esiste $v \neq 0$ t.c. $f(v) = 0 \cdot v = 0$, cioè che $v \in \ker(f)$, cioè che $\dim(\ker(f)) \geq 1$, cioè che rango di f (e di ogni matrice associata ad f) non è il max possibile, cioè $\det = 0$.

Ricerca di autovalori Un certo λ è autovalore di una matrice A se e solo se $\det(A - \lambda Id) = 0$
 $\uparrow$
matrice identica

Esempio Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Voglio trovare gli autovalori, posto che esistano.

$$A - \lambda Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
ho tolto λ alla diagonale

$$\det(A - \lambda Id) = (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = \lambda^2 - \lambda - 4\lambda + 4 + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

$$\det(A - \lambda Id) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$
$$\Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ oppure } \lambda = 3$$

Quindi $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$ sono gli autovalori.

Chi sono gli autospazi corrispondenti?

$\lambda = 2$ Cerco i vettori v t.c. $Av = 2v$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x + 2y = 2x \\ -x + 4y = 2y \end{array} \quad \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$$

y è variabile libera, quindi le soluzioni sono $y = t$, $x = 2t$
cioè $(x, y) = t(2, 1)$. Quindi autospazio di $\lambda = 2$ è $\text{Span}\{(2, 1)\}$.

$\lambda = 3$ Mi riduco $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + 2y = 3x \\ -x + 4y = 3y \end{cases} \quad \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

Deve succedere che il sistema omogeneo finale non ha rango massimo, quindi ha soluzioni diverse a quella banale $(0, 0)$.

La soluzione è $(x, y) = (t, t) = t(1, 1)$

Quindi autospazio di $\lambda = 3$ è $\text{Span}\{(1, 1)\}$.

Se ora uso come base $v_1 = (2, 1)$ $v_2 = (1, 1)$ ho diagonalizzato la matrice. Verifica diretta

$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Comp. base $\{v_1, v_2\} \rightarrow$ Comp. base canonica

$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ In generale $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$MAM^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 15 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$$

c'è qualcosa che non va... infatti ho invertito M ed M^{-1} .

Il conto giusto è $M^{-1}AM$ che produce la matrice dalla base nuova alla base vecchia

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$