

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 37

Titolo nota

27/11/2013

FORME CANONICHE di appl. lineari

- ① Autovalori e autovettori
- ② Diagonalizzazione
- ③ Polinomio minimo e pol. caratteristico
- ④ Teorema spettrale
- ⑤ Forma di JORDAN.

— 0 — 0 —

Motivazioni Sia $f: V \rightarrow W$ applic. lineare. Scelta una base di V e scelta una base di W , si associa ad f una matrice. Cambiando la base in partenza ed arrivo, la matrice cambia, anche se f rimane sempre la stessa.

Domanda: scegliendo bene le basi, posso fare in modo che la matrice sia "bella", cioè particolarmente semplice?

— 0 — 0 —

Caso banale Sia V spazio di dim. n , sia W uno sp. di dim. m . Sia $f: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare di rango r , cioè con $\dim(\text{Im}(f)) = r$. Allora posso scegliere una base $v_1, \dots, v_n$ di V ed una base $w_1, \dots, w_m$ di W tali che la matrice associata ad f sia della forma

$$\begin{array}{c} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_n \begin{array}{|cc|cc} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} \underbrace{\hspace{1.5cm}}_m \\ \end{array} \end{array}$$

Dim. Consider $\ker(f)$. La sua dim. è $n-r$ per il teo. della dim. Prendo una base di $\ker(f)$ e la completo ad una base di V . Ottengo $\underbrace{v_1, \dots, v_r}_{\text{completamento}} \underbrace{v_{r+1}, \dots, v_n}_{\text{base di } \ker(f)}$

Per quanto visto a suo tempo $w_1 = f(v_1), \dots, w_r = f(v_r)$ sono r vettori che costituiscono una base di $\text{Im}(f)$ (vedi dim. del teo. della dim.), Li completo ad una base di W :

$w_1, \dots, w_r$, $w_{r+1}, \dots, w_n$
base di $\text{Im}(f)$ completamente a base di W_2

Qual è la matrice che rappresenta f con questa scelta delle basi?

Esattamente quella prevista

il resto sono tutti zeri.

1	0	...	0	0
0	1		...	0
0	0		1	0
0	0		0	...
...	...		0	0
0	0		0	0

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 $f(w_1)$ $f(w_2)$ $f(w_n)$ $f(w_{n+1})$

$\text{---} 0 \text{---}$ $\text{---} 0 \text{---}$

Caso "serio" Lo spazio di partenza coincide con quello di arrivo, cioè $f: V \rightarrow V$ e voglio usare la STESSA BASE in partenza ed arrivo.

Interpretazione in termini di matrici. Sia $f: V \rightarrow V$. Sia A la matrice associata ad f rispetto ad una certa base.

Se cambio base la nuova matrice sarà

$$M A M^{-1}$$

dove M è la matrice di cambio di base, cioè la matrice le cui colonne sono le componenti dei vettori della nuova base rispetto alla vecchia base. Occhio: la matrice M è invertibile.

In termini di matrici: data A , trovare M invertibile tale che MAM^{-1} sia particolarmente semplice.

Definizione Una matrice A quadrata si dice simile ad una matrice B delle stesse dimensioni, se $B = MAM^{-1}$ per un'opportuna M invertibile.
Moralmente: A e B rappresentano la stessa f solo in basi diverse.

Oss. Se $B = MAM^{-1}$, allora $A = M^{-1}BM$

[$B = MAM^{-1} \rightsquigarrow$ moltip. a dx per $M \rightsquigarrow BM = MAM^{-1}M = MA$
 $\rightsquigarrow$ moltiplico a sx per M^{-1} e ottengo $M^{-1}BM = A$]

Quindi se A è simile a B , anche B è simile ad A .

Forme canoniche = trovare matrice "bella" simile ad una A data.
— o — o —

Ancora sui cambi di base

Caso più generale : $f: V \rightarrow W$ $\{v_1, \dots, v_n\}$ base di V
 $\{w_1, \dots, w_m\}$ base di W
 A = matrice che rappresenta f in queste basi

$\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ nuova base di V

$\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$ nuova base di W

Domanda: chi è la nuova matrice?

Costruisco le 2 matrici di cambio di base

M matrice $n \times n$ che ha come colonne le componenti di $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ rispetto a $\{v_1, \dots, v_n\}$ (cambio di base in V)

N matrice $m \times m$ che fa la stessa cosa con $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$ e $\{w_1, \dots, w_m\}$.

Allora

nuova matrice = $N A M^{-1}$

N^{-1} : dopo video M : corretto dopo video

qui ok $\rightarrow$ vecchia di W $\downarrow$ nuova di W $\downarrow$ nuova base di V $\downarrow$ vecchia base di V $\leftarrow$ qui ok

vecchia di $V \xrightarrow{f}$ vecchia di W

Conversioni dopo video: per come sono definite

- M manda le comp. risp. a $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ nelle comp. risp. a $\{v_1, \dots, v_n\}$
- N " $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$ " $\{w_1, \dots, w_m\}$

Caso banale in termini di matrici: data una matrice A $m \times n$ di rango n , esistono matrici invertibili M ed N di dim. opportune, tali che

$$NAM^{-1} \text{ sia del tipo } \left. \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} \overbrace{1 \ 0}^n & \\ \hline 0 & 1 \end{array} & 0 \\ \hline 0 & \end{array} \right\} m$$

Cambi di base e algoritmo di Gauss

Lavorare alla Gauss su una matrice A è equivalente a moltiplicare A a sinistra per una certa N invertibile, quindi è equivalente a cambiare base in arrivo.

Per esempio, se voglio scambiare le prime 2 righe di A , moltiplico a sx per

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} A$$

Se voglio sostituire la seconda riga con la somma delle prime 2, moltiplico a sx per

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}$$

↑
ricopia le righe della 2 in poi

Gauss traslato: data una qualunque matrice A $m \times n$ esiste una matrice N $m \times m$ invertibile tale che
 NA
 sia una matrice a scala