

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 36

Titolo nota

23/11/2013

Esercizio 1 $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\}$

(a) Trovare $V^\perp$

(b) Scrivere nella base canonica la matrice dell'applic. lineare che rappresenta la proiezione su V

Punto (a) Non serve, ma trovo una base di V

$$V = \text{Span} \left\{ \underset{\uparrow}{(1, 0, 1)}, \underset{\uparrow}{(0, 1, 0)} \right\} \quad \text{variabili libere } y \text{ e } z$$

Ora $V \oplus V^\perp = \mathbb{R}^3$, quindi $V^\perp$ ha dimensione 1. Quindi devo trovare un vettore che sia $\perp$ ai 2 della base di V .

1° modo Lo scrivo come (a, b, c) , impongo 2 prod. scal. = 0, sistema,...

2° modo Formula misteriosa

3° modo Era il piano $x - z = 0$, quindi sarà $(1, 0, -1)$

$$\text{Quindi } V = \text{Span} \left\{ \underset{\uparrow}{(1, 0, 1)}, \underset{\uparrow}{(0, 1, 0)} \right\} \quad V^\perp = \text{Span} \left\{ \underset{\uparrow}{(1, 0, -1)} \right\}.$$

Punto (b) Proiezione di un vettore rispetto ad una somma ortogonale.

Se $\underset{\uparrow}{X} = \underset{\uparrow}{W_1} \oplus \underset{\uparrow}{W_2}$, allora ogni $x \in X$ si scrive in modo unico come somma $x = \underset{\uparrow}{w_1} + \underset{\uparrow}{w_2}$
 $\uparrow$ sp. vett. $\uparrow$ s.sp. vett. $\uparrow \in W_1$ $\uparrow \in W_2$

w_1 e w_2 si dicono le componenti di x rispetto alla somma diretta.

In particolare

- w_1 è la proiezione di x sul sottospazio W_1
- w_2 " " " " " " " W_2 .

Se la decomposizione è del tipo $X = V \oplus V^\perp$, allora si parla di proiezione ortogonale.

Nel nostro esempio avremo che, detta $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la proiezione,

$$f(v_1) = v_1$$

$$f(v_2) = v_2$$

$$f(v_3) = 0.$$

Allora la matrice di f dalla base $\{v_1, v_2, v_3\}$ in $\{v_1, v_2, v_3\}$ è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $f(v_1) \quad f(v_2) \quad f(v_3)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $f(v_1) \quad f(v_2) \quad f(v_3)$

← Questa matrice rappresenta f avendo in partenza la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ ed in arrivo la base canonica

Qual è la matrice di f avendo in partenza $\{v_1, v_3, v_2\}$ ed in arrivo $\{v_3, v_2, v_1\}$?

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $f(v_1) \quad f(v_3) \quad f(v_2)$

Io però voglio f dalla canonica alla canonica, quindi mi serve la matrice di cambio di base

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[Manda comp. $\{v_1, v_2, v_3\} \rightarrow$ comp. rispetto alla canonica]

$$\boxed{M A M^{-1}}$$

→ rappresenta f dalla canonica alla canonica.

In alternativa posso fare

$$\boxed{B M^{-1}}$$

comp. $\{v_1, v_2, v_3\}$

$\downarrow f$

base canonica

comp. canonica

comp. $\{v_1, v_2, v_3\}$

Verificare che venga la stessa cosa.

Esercizio In $\mathbb{R}^4$ consideriamo

$$V = \{(x, y, z, w) : x - y = z + 3w\}$$

Dimostrare che esiste un'unica $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ lineare t.c.

$$f(1, 1, 1, 1) = (5, 4, 3, 2) \quad \text{e} \quad \ker f = V$$

Scrivere la matrice ... base canonica.

$\dim V = 3$. Sia v_1, v_2, v_3 una base di V , sia $v_4 = (1, 1, 1, 1)$.

Allora v_1, v_2, v_3, v_4 è una base di $\mathbb{R}^4$

↑ basta verificare che non sta in V .

A questo punto f dovrà soddisfare

$$f(v_1) = f(v_2) = f(v_3) = 0 \quad f(v_4) = (5, 4, 3, 2),$$

quindi esiste ed è unica.

Trovo la base

$$v_1 = (1, 1, 0, 0)$$

$$v_2 = (1, 0, 1, 0)$$

$$v_3 = (3, 0, 0, 1)$$

$$v_4 = (1, 1, 1, 1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $f(v_1) \quad f(v_2) \quad f(v_3) \quad f(v_4)$

Questa matrice rappresenta f avendo
in partenza v_1, v_2, v_3, v_4 e in arrivo
la canonica.

Nota: se avessi voluto usare la $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ in partenza ed arrivo
avrei dovuto mettere nell'ultima colonna a, b, c, d determinati
risolvendo $(5, 4, 3, 2) = av_1 + bv_2 + cv_3 + dv_4$

Se voglio f dalla canonica alla canonica
devo usare

$$A M^{-1}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Variente: scrivere tutte le matrici che rappresentano $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$
tali che $\ker(f) = V$ ↑ quello precedente

- Idea:
- ① L'applicazione è univocamente determinata una volta che so dove vanno v_1, v_2, v_3, v_4
 - ② v_1, v_2, v_3 vanno per forza in 0, v_4 non ha vincoli
 - ③ Quindi mi restano 4 gradi di libertà

E se chiedersi che l'immagine di f sia (contenuta in) V .
 $f(v_i)$ deve essere una comb. lin. di v_1, v_2, v_3 e basta
per ogni $i = 1, 2, 3, 4$, quindi ho 12 gradi di libertà.

— 0 — 0 —