

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 35

Titolo nota

23/11/2013

Come determinare una base per l'intersezione di 2 sottospazi.

Esempio $V = \text{Span} \{ (1, 0, 1, 0), (0, 2, 1, 3) \}$
 $W = \text{Span} \{ (2, 2, 3, 3), (0, 1, 1, 1) \}$

Dim. e base per $V, W, V+W, V \cap W$.
 → dim. facile dal teo. dim.
 → base più difficile.
 facili medio → dimensione = rango matrice
 → base = si vede dalla matrice

1° modo Scrivo eq. cartesiane per V e W . Allora le eq. cartesiane per $V \cap W$ sono il sistema costituito dalle eq. di V e le eq. di W .
 Quindi ottengo un sistema di 4 eq. in 4 incognite le cui soluzioni sono proprio $V \cap W$.
 dopo video

$$V: ax + by + cz + dw = 0 \quad \begin{cases} a + c = 0 \\ 2b + c + 3d = 0 \end{cases}$$

$$c = 0, d = 1 \rightsquigarrow a = 0, b = -\frac{3}{2}$$

$$c = 1, d = 0 \rightsquigarrow a = -1, b = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{3}{2}y + w = 0$$

$$-x - \frac{1}{2}y + z = 0$$

$$-3y + 2w = 0$$

$$2x + y - 2z = 0$$

$$W: ax + by + cz + dw = 0 \quad \begin{cases} 2a + 2b + 3c + 3d = 0 \\ b + c + d = 0 \end{cases}$$

$$c = 0, d = 1 \rightsquigarrow b = -1, a = -\frac{1}{2} \rightsquigarrow -\frac{1}{2}x - y + w = 0$$

$$c = 1, d = 0 \rightsquigarrow b = -1, a = -\frac{1}{2} \rightsquigarrow -\frac{1}{2}x - y + z = 0$$

$$x + 2y - 2w = 0$$

$$x + 2y - 2z = 0$$

Eq. per $V \cap W$:

$$\begin{aligned} -3y + 2w &= 0 \\ 2x + y - 2z &= 0 \\ x + 2y - 2w &= 0 \\ x + 2y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 & 4^a \\ 2z - 2w &= 0 & 3^a - 4^a \\ -3y + 2z &= 0 & 2^a - 2 \cdot 4^a \\ -3y + 2w &= 0 & 1^a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z &= 0 & 1^a \\ -3y + 2z &= 0 & 3^a \\ 2z - 2w &= 0 & 2^a \\ \boxed{2z - 2w} &= 0 & 3^a - 4^a \end{aligned}$$

Questo doveva succedere se uno sapeva che $\dim(V+W) = 3$

w variabile libera $w = t, z = t, y = \frac{2}{3}t, x = 2z - 2y = 2t - \frac{4}{3}t = \frac{2}{3}t$

$(\frac{2}{3}t, \frac{2}{3}t, t, t) = t(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1, 1)$ Una base è $(2, 2, 3, 3)$

2° modo $V = a(1, 0, 1, 0) + b(0, 2, 1, 3)$ a, b parametri
 $W = c(2, 2, 3, 3) + d(0, 1, 1, 1)$ c, d parametri

Ora metto a sistema:

$$\underbrace{a(1, 0, 1, 0) + b(0, 2, 1, 3)}_{\text{generico vettore di } V} = \underbrace{c(2, 2, 3, 3) + d(0, 1, 1, 1)}_{\text{generico vettore di } W}$$

$$\begin{cases} a = 2c \\ 2b = 2c + d \\ a + b = 3c + d \\ 3b = 3c + d \end{cases} \quad \begin{cases} a - 2c = 0 \\ 2b - 2c - d = 0 \\ a + b - 3c - d = 0 \\ 3b - 3c - d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a - 2c = 0 \\ 2b - 2c - d = 0 \\ b - c + d = 0 \\ 3b - 3c - d = 0 \end{cases}$$

$-d$: corretto dopo video: cambia il futuro, ma non la sostanza.

$$\begin{cases} a - 2c = 0 & a - 2c = 0 \\ b - c + d = 0 & b - c = 0 \\ -3d = 0 & d = 0 \\ -4d = 0 & \end{cases} \quad \begin{matrix} c \text{ variabile libera} & d = 0 \\ b = c & a = 2c \end{matrix}$$

Ad esempio: $c=1, b=1, a=2, d=0$

$$\begin{aligned} a(1, 0, 1, 0) + b(0, 2, 1, 3) &= (2, 2, 3, 3) \leftarrow \text{genera l'intersezione} \\ \uparrow & \quad \uparrow \\ c(2, 2, 3, 3) + d(0, 1, 1, 1) &= (2, 2, 3, 3) \end{aligned}$$

Esempio? Consideriamo in $\mathbb{R}^3$

$$V = \{(x, y, z) : x - y + 2z = 0\}$$

$$W = \text{Span} \{ \underbrace{(1, 2, 3)}_{v_3} \}$$

(a) Dimostrare che $V \oplus W \stackrel{v_3}{=} \mathbb{R}^3$

(b) Dim. che esiste un' unica appl. lin. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ t.c.

$$f(v) = 2v \quad \text{per ogni } v \in V$$

$$f(w) = 3w \quad \text{" " } w \in W$$

(c) Scrivere la matrice di f nella base canonica.

Scrivo una base di V $V = \text{Span} \{ \overbrace{(-2, 0, 1)}^{v_1}, \overbrace{(1, 1, 0)}^{v_2} \}$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -6 + 2 - 1 = -5 \Rightarrow \text{vett. lin. indep.}$$
$$\Rightarrow \dim(V+W) = 3$$
$$\Rightarrow \dim(V \cap W) = 0.$$

(b) Mi serve una funzione lineare t.c.

$$f(v_1) = 2v_1$$

$$f(v_2) = 2v_2$$

$$f(v_3) = 3v_3$$

Teo. fond. delle applic. lineari dice che esiste un' unica applic. lineare che manda una base dove mi pare.

(c) Quello che è facile è scrivere la matrice di f usando la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ in partenza e arrivo. la matrice in tal caso è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Per avere la matrice dalla canonica alla canonica devo fare un cambio di base

$$M = \begin{pmatrix} \downarrow v_1 & \downarrow v_2 & \downarrow v_3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

INPUT: comp. risp. $\{v_1, v_2, v_3\}$

OUTPUT: comp. risp. canonica

$$\text{Comp. canonica} \xrightarrow{M^{-1}} \text{Comp. } \{v_1, v_2, v_3\} \xrightarrow{A} \text{Comp. } \{v_1, v_2, v_3\} \xrightarrow{M} \text{Comp. canon.}$$

Quindi alla fine la matrice richiesta è

$$M A M^{-1}$$

↑
quella che si fa per prima