

# ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 34

Titolo nota

23/11/2013

Sottospazi vettoriali → presentazione cartesiana → equazioni  
→ presentazione parametrica → Span

Esempio 1  $V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0 \}$

Esercizio banale: verificare che si tratta di un s.sp. vett.

Trovare una parametrizzazione vuol dire trovare una base e scrivere l'el. generico come comb. lineare.

$$z = t, y = s, x = \frac{1}{2}(y - z) = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t$$

Elemento generico:  $(\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t, s, t) = t(-\frac{1}{2}, 0, 1) + s(\frac{1}{2}, 1, 0)$

rapp. parametrica di V

Un'altra rappresentazione sarebbe:

$$t(1, 0, -2) + s(1, 2, 0)$$

$$V = \text{Span} \{ (1, 0, -2), (1, 2, 0) \}$$

Esempio 2  $V = \text{Span} \{ (1, 1, -2), (0, 1, 3) \}$

$$= t(1, 1, -2) + s(0, 1, 3) \quad t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}$$

Se voglio una rapp. cartesiana  $ax + by + cz = 0$  ho 2 possibilità

1° modo Sostituisco la parametrica nella cartesiana a coeff. incogniti

$$(t, t+s, -2t+3s)$$

$$ax + by + cz = 0$$

$$at + b(t+s) + c(-2t+3s) = 0$$

$$at + bt + bs - 2ct + 3cs = 0$$

$$\begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ b + 3c = 0 \end{cases}$$

$$c \text{ libero, } b = -3c, a = 2c - b = 2c + 3c = 5c$$

$$5cx - 3cy + cz = 0$$

Do un valore che mi piace a c (va bene tutti meno  $c=0$ ):

$$c = 1$$

↪

$$5x - 3y + z = 0$$

$(a,b,c)$  deve essere un vettore  $\perp$  al sottospazio  $V$ .

Cerco  $(a,b,c)$  perpendicolare a  $(1,1,-2)$  e  $(0,1,3)$ . lo posso fare (2° modo) con la formula misteriosa

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (5, -3, 1) \rightsquigarrow 5x - 3y + z = 0$$

— 0 — 0 —

Esempio 3  $V = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \}$

rapp. cartesiana

Se voglio la parametrica risolvo il sistema

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y-z=0 \\ -3y+3z=0 \end{cases} \quad z=t, y=t, x=0$$

$$(0, t, t) = t(0, 1, 1) \quad \text{rappresentazione parametrica} \quad \text{Span}\{(0, 1, 1)\}$$

Esempio 4  $V = \text{Span}\{(1, 2, 3)\}$  = retta per l'origine in  $\mathbb{R}^3$   
= s.s.p. vett. di  $\mathbb{R}^3$  di dimensione 1.

Trovare una rapp. cartesiana vuol dire scriverla come intersezione di 2 piani. La rappresentazione non sarà per nulla unica.

Cerco i piani che contengono la retta data:

$$ax + by + cz = 0 \quad t(1, 2, 3) = (t, 2t, 3t)$$
$$at + 2bt + 3ct = 0 \rightsquigarrow a + 2b + 3c = 0$$

Questa è un'eq. in  $a, b, c$  che avrà soluzioni dipendenti da 2 parametri: fisso  $b$  e  $c$  come mi pare e trovo  $a$  di conseguenza

$$b=0, c=1 \rightsquigarrow a=-3 \rightsquigarrow \begin{cases} -3x+z=0 \\ -2x+y=0 \end{cases} \quad \text{Sono 2 piani la cui intersezione è la retta}$$
$$b=1, c=0 \rightsquigarrow a=-2 \rightsquigarrow$$

$$b=2, c=3 \rightsquigarrow a=-13 \rightsquigarrow \begin{cases} -13x+2y+3z=0 \\ -10x-y+4z=0 \end{cases} \quad \text{Altri 2 piani la cui inters. è la retta}$$
$$b=-1, c=4 \rightsquigarrow a=-10 \rightsquigarrow$$

Esempio 5  $V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x+y = z+2w = 0\}$

$\begin{cases} x+y=0 \\ z+2w=0 \end{cases}$  Rappresentazione cartesiana di un s.s.p. vett. di  $\mathbb{R}^4$  di dimensione 2

Se risolvo il sistema ottengo una rappr. parametrica

$$\begin{aligned} x+y &= 0 & y &= t, & w &= s, & z &= -2s, & x &= -t \\ z+2w &= 0 \end{aligned}$$

$$(-t, t, -2s, s) = t(-1, 1, 0, 0) + s(0, 0, -2, 1) \quad \text{rappr. parametrica}$$

Esempio 6  $W = \text{Span}\{(2, -2, 2, -1), (1, 2, 1, 0)\}$   
= s.s.p. di  $\mathbb{R}^4$  di dimensione 2.

Se volessi una rappr. cartesiana, cerco  $ax+by+cz+dw=0$  in modo che si annulli in tutti i vettori di  $W$ . Basta che si annulli in una base, quindi:

$$\begin{cases} 2a-2b+2c-d=0 \\ a+2b+c=0 \end{cases}$$

Risolvere il sistema assegnando 2 coppie di valori "a caso" alle variabili libere  $c$  e  $d$  (ad esempio  $c=0, d=1$  e poi  $c=1, d=0$ ) e ottengo 2 equazioni che descrivono  $W$ .

Trovare  $\dim(V+W)$  e  $\dim(V \cap W)$

$$\dim(V+W) = \dim \text{Span}\{\underbrace{(-1, 1, 0, 0), (0, 0, -2, 1)}_{\text{base di } V}, \underbrace{(2, -2, 2, -1), (1, 2, 1, 0)}_{\text{base di } W}\}$$

generatori di  $V+W$ , una non nec. base

Per sapere la dimensione il modo più comodo è fare il rango della matrice  $4 \times 4$  che ha i 4 vettori come righe o come colonne. In questo caso il rango è 3 (si vede alla Gauss o facendo  $\det=0$  e cercando un minore  $3 \times 3$  con  $\det \neq 0$ )

Una volta che  $\dim(V+W) = 3$ , per forza  $\dim(V \cap W) = 1$ .

Altra domanda: determinare una base di  $V+W$  e una di  $V \cap W$ .

Per avere una base di  $V+W$  basta cercare un minore  $3 \times 3$  con  $\det \neq 0$  della matrice e prendere le righe o colonne corrispondenti.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

← righe lin. indep. (perché il rango della  $3 \times 4$  è 3)

← quindi sono una base di  $V+W$ .

←

↑  
minore con  
 $\det \neq 0$