

MATRICI ORTOGONALI

Def. Una matrice $A \in M_{n \times n}$ (quindi quadrata) si dice ortogonale se

$$AA^t = A^t A = \text{Identità}$$

Questo è equivalente a richiedere che $A^t = A^{-1}$.

Teorema (Proprietà delle matrici ortogonali)

- (1) Una matrice A è ortogonale se e solo se le sue colonne sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$
- (2) Stessa cosa per le righe.
- (3) Il prodotto di 2 matrici ortogonali è una matrice ortogonale
- (4) Det di una matrice ortogonale è ± 1 .
- (5) L'inversa di una matrice ortogonale è ortogonale.

Achtung! La somma di matrici ortogonali NON è ortogonale
Il prodotto di una ortogonale per un numero NON è in generale ortogonale.

Dim. (4) Il determinante dell'inversa di A è l'inverso del Det.

$$A \cdot A^{-1} = I_d$$

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I) = 1$$

$\uparrow$ BINET $\uparrow$ ug. di sopra $\uparrow$ def. di Det

Quindi

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Se A è ortogonale, allora per definizione $A^t = A^{-1}$, ma allora

$$\det(A) = \det(A^t) = \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$\uparrow$ propr. det. $\uparrow$ A è ortog. $\uparrow$ propr. det.

Quindi $[\det(A)]^2 = 1$, cioè $\det(A) = \pm 1$.

(3) Siano A e B ortogonali, cioè $A^t = A^{-1}$ e $B^t = B^{-1}$.

Allora

$$(AB)^t = B^t \cdot A^t = B^{-1} \cdot A^{-1} = (AB)^{-1}$$

$\uparrow$ proprietà trasposta $\uparrow$ A e B ortogonali

Quindi $(AB)^t = (AB)^{-1}$, quindi AB è ortogonale

(5) Sia A ortogonale, cioè $A^t = A^{-1}$.

Allora

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = (A^{-1})^{-1}$$

$\uparrow$ proprietà della trasposta $\uparrow$ A è ortogonale

Quindi $(A^{-1})^t = (A^{-1})^{-1}$, quindi A^{-1} è ortogonale

[Parentesi: perché l'inversa della trasposta è la trasposta dell'inversa?]

Dov'è verificare che

$$(A^{-1})^t \cdot A^t = \text{Identità}$$

Potremmo da $A \cdot A^{-1} = \text{Id}$. Faccio il trasposto a dx e sx:

$$(A \cdot A^{-1})^t = \text{Id}^t$$
$$(A^{-1})^t \cdot A^t = \text{Id} \quad \text{questo è come dire che } (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.]$$

(1) Cosa vuol dire che $A \cdot A^t = \boxed{A^t \cdot A = \text{Id}}$?

$$A = (c_1 | c_2 | \dots | c_m)$$

$$A^t = \begin{pmatrix} \overline{c_1} \\ \overline{c_2} \\ \vdots \\ \overline{c_m} \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{array} \right) \left(c_1 | c_2 | \dots | c_n \right) = \left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right)$$

Quando calcolo questo prodotto, il termine di posto i, j è proprio $\langle c_i, c_j \rangle$.

Se il prodotto deve venire la matrice identica, vuol dire che $\langle c_i, c_j \rangle = \delta_{i,j}$, cioè che le colonne sono una base ortonormale.

[Oss. : se le colonne di A sono una base ortogonale, ma non necessariamente ortonormale, allora $A^t A$ diventa una matrice diagonale]

(2) Stesso discorso con le righe: $A = \left(\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \end{array} \right) \quad A^t = \left(R_1 | R_2 | \dots \right)$

$A \cdot A^t$ ha come elemento i, j il prod. scalare $\langle R_i, R_j \rangle$ e se è l'identità ho finito

Osservazione importante Sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.
Costruisco la matrice M in cui i v_i sono le colonne.

Allora M è la matrice di cambio di base

$\{\text{comp. base } v_1, \dots, v_n\} \rightarrow \{\text{comp. base canonica } e_1, \dots, e_n\}$
e si tratta di una matrice ortogonale.

Visto che di solito serve M^{-1} , che manda le comp. risp. alla canonica nelle comp. risp. a $v_1, \dots, v_n$, ora M^{-1} si calcola semplicemente facendo la trasposta.

Esercizio $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + z - 2w = 0\}$

Trovare basi ortonormali per W e $W^\perp$.

① Produco una base di W : $(0, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (2, 0, 0, 1)$

Un'altra base $(1, 1, -1, 0), (2, 1, -2, 0), (0, 0, 2, 1)$

② Produca una base di $W^\perp$, che avrà dimensione 1.

1° modo Impongo i 3 prodotti scalari nulli e risolvo:

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+y-2z=0 \\ 2z+w=0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y=0 \\ -x+z=0 \\ 2x+w=0 \end{cases}$$

e risolvo.

2° modo Uso la formula per produrre un vettore $\perp$ a 3 dati:

$$\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Sviluppando rispetto alla 1ª riga trovo la comp.} \\ e_1 \cdot \det(A_{11}) - e_2 \det(A_{12}) + e_3 \det(A_{13}) \\ - e_4 \det(A_{14}) \end{array}$$

③ GS sulla prima base

$$w_1 = (0, 1, 0, 0), \quad w_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

$$= (-1, 0, 1, 0) - 0 = (-1, 0, 1, 0)$$

$$w_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle u_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$$

$$= (2, 0, 0, 1) - 0 - \frac{-2}{2} (-1, 0, 1, 0)$$

$$= (2, 0, 0, 1) + (-1, 0, 1, 0) = (1, 0, 1, 1) \quad \text{Verifica.}$$

[Controllare che i 4 vettori messi in colonna diano una matrice ortogonale].