

ORTOGONALE DI UN SOTTOSPAZIO

Def. Sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale

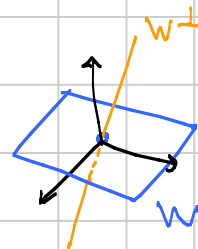
Si definisce ortogonale di W e' insieme

$$W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, w \rangle = 0 \text{ per ogni } w \in W\}$$

Esempio Sia W un piano di $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine.

Allora $W^\perp$ è la retta per l'origine $\perp$ a W .

Viceversa, se W è una retta per l'origine, allora $W^\perp$ è il piano per l'origine perpendicolare alla retta.



Teorema Sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottospazio vettoriale e sia $W^\perp$ il suo ortogonale.

Allora

(i) $W^\perp$ è un sottospazio vettoriale

(ii) $W^\perp \cap W = \{0\}$

(iii) $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$

(iv) $(W^\perp)^\perp = W$.

Dim. (i) Se $v_1 \in W^\perp$ e $v_2 \in W^\perp$, è ancora vero che $v_1 + v_2 \in W^\perp$?

Sì perché

$$\langle v_1 + v_2, w \rangle = \underbrace{\langle v_1, w \rangle}_0 + \underbrace{\langle v_2, w \rangle}_0 = 0 + 0 \text{ per ogni } w \in W$$

Se $v \in W^\perp$ e $a \in \mathbb{R}$, è ancora vero che $av \in W^\perp$?

Sì perché

$$\langle av, w \rangle = a \underbrace{\langle v, w \rangle}_0 = 0$$

(ii) Se $v \in W^\perp \cap W$, vuol dire che v è ortogonale a tutti gli elementi di W , quindi anche a v stesso!

$$\begin{array}{c} \langle v, v \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \|v\|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0. \\ \uparrow \quad \quad \uparrow \\ \in W^\perp \quad \in W \end{array}$$

(iii) e (iv) $\leadsto$ Non lo dimostro...

— o — o —

Esercizio Considero in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio

$$W = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0, \quad x + z = 0 \}.$$

Trovare $W^\perp$.

Per trovare W risolvo il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -2y + 2z = 0 \end{cases}$$

z libero e ricavo x e y .

Pongo $z = t$, e ottengo $y = t$, $x = z - 2y = -t$.

Quindi la soluzione del sistema è

$$t \underbrace{(-1, 1, 1)}_{\text{base di } W}$$

$W^\perp$ è il piano perpendicolare al vettore $(-1, 1, 1)$, cioè il piano
 $-x + y + z = 0$

Esercizio Trovare una base ortonormale di $W^\perp$, cioè del sottospazio
 $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + y + z = 0 \}$

Procedimento: ① trovo una base qualunque
② ortogonalizzo con GS
③ ortonormalizzo.

① Volendo fare complicata, risolvo il sistema $-x + y + z = 0$.

Pongo $z = t$, $y = s$ (due variabili libere) e ottengo $x = t + s$.

Quindi la soluzione del sistema è

$$(t+s, s, t) = t \underbrace{(1, 0, 1)}_{\text{base di } W^\perp} + s \underbrace{(1, 1, 0)}_{\text{base di } W^\perp}$$

(Nota: altre basi sono: $(1, 1, 0)$, $(0, 1, -1)$
 $(2, 3, -1)$, $(1, 3, -4)$)

② Applico GS alla base $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$

$$w_1 = v_1 = (1, 0, 1). \quad w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

$$= (1, 1, 0) - \frac{1}{2} (1, 0, 1)$$

$$= (1, 1, 0) - \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$$

③ Ortogonalizzo: $\frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}} \quad \frac{\left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{2} (1, 2, -1) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

quindi $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

Verifica finale Controllare che siano ortonormali e stiano nello spazio, cioè $-x + y + z = 0$.
— 0 — 0 —

Esercizio Sia $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; x + y = x - 3y + z + w = 0\}$

Trovare $W^\perp$ e basi ortonormali per W e $W^\perp$.

① Trovo una base di W

② Trovo una base di $W^\perp$

③ GS sulle 2 basi

④ Ortogonalizzazione finale ← facile, basta dividere per le norme

① Risolvo $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 3y + z + w = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ -4y + z + w = 0 \end{cases}$

z e w libere

$$z = t, w = s, y = \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}s, x = -y = -\frac{1}{4}t - \frac{1}{4}s$$

$$\text{Quindi } (x, y, z, w) = t \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1, 0\right) + s \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 1\right)$$

$$\text{Quindi una base di } W \text{ è } \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 1, 0\right), \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, 1\right)$$

Meglio: una base è

$$(-1, 1, 4, 0), (-1, 1, 0, 4) \quad (\text{no verificare che risolvono})$$

② $W^\perp$ sono tutti i vettori $\perp$ a quelli di W . Basta controllare che siano $\perp$ ad una base.

Prendo il generico vettore (x, y, z, w) e impongo i 2 prod. scalari:

$$\begin{cases} -x + y + 4z = 0 \\ -x + y + 4w = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -x + y + 4z = 0 \\ -4z + 4w = 0 \end{cases}$$

y e w libere: $y = t, w = s$, da cui $z = s, x = y + 4z = t + 4s$

Quindi la soluzione generale è

$$(t + 4s, t, s, s) = t \underbrace{(1, 1, 0, 0)}_{\text{base di } W^\perp} + s \underbrace{(4, 0, 1, 1)}_{\text{base di } W^\perp}$$

$$\textcircled{3} \text{ GS su } \underbrace{(-1, 1, 4, 0)}_{v_1}, \underbrace{(-1, 1, 0, 4)}_{v_2}$$

$$w_1 = v_1 = \boxed{(-1, 1, 4, 0)} \quad w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 =$$

$$= (-1, 1, 0, 4) - \frac{1+1+0+0}{1+1+16+0} (-1, 1, 4, 0) = \boxed{(-1, 1, 0, 4) - \frac{1}{9}(-1, 1, 4, 0)}$$

no conto

$$\text{GS su } (1, 1, 0, 0), (4, 0, 1, 1)$$

$$w_1 = \boxed{(1, 1, 0, 0)}, \quad w_2 = (4, 0, 1, 1) - \frac{4}{2} (1, 1, 0, 0) \\ = (4, 0, 1, 1) - (2, 2, 0, 0) = \boxed{(2, -2, 1, 1)}$$

I 4 vettori indicati costituiscono una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ (verifica!).