

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 31

Titolo nota

20/11/2013

BASI ORTOGONALI

MATRICI ORTOGONALI

BASI ORTONORMALI

Def. Una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ di $\mathbb{R}^n$ si dice ortogonale se i vettori che la compongono sono a 2 a 2 ortogonali, cioè se

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \text{per ogni } i \neq j$$

La base si dice ortonormale se è ortogonale ed i vettori che la compongono hanno norma unitaria, cioè

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \text{per ogni } i \neq j$$

$$\langle v_i, v_i \rangle = 1 \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, n$$

Notazione Si pone per definizione

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

Con questa notazione una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ è ortonormale se

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j} \quad \text{per ogni } i \text{ e } j \text{ (uguali o diversi)}$$

Oss. La matrice $\{\delta_{i,j}\}$ è la matrice identica $n \times n$.

Esempi ① La base canonica in $\mathbb{R}^n$ è ortonormale.

② La base $\{\underbrace{(1,2)}_{v_1}, \underbrace{(-2,1)}_{v_2}\}$ di $\mathbb{R}^2$ è ortogonale in quanto

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

Non è ortonormale perché $\langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_2, v_2 \rangle = 5$

③ La base $\{(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}), (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})\}$ di $\mathbb{R}^2$ è ortonormale ed è stata ottenuta dalla precedente dividendo ogni vettore per la sua norma.

Fatto generale Se $\{v_1, \dots, v_m\}$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$, allora $\left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \dots, \frac{v_m}{\|v_m\|} \right\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

Dim. Se ne prendo 2 diversi

$$\left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_j}{\|v_j\|} \right\rangle = \frac{1}{\|v_i\|} \cdot \frac{1}{\|v_j\|} \cdot \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{\substack{\text{perché erano} \\ \text{ortogonali}}} = 0 \quad \text{per ogni } i \neq j.$$

le costanti
escono fuori

Se invece $i=j$: $\left\langle \frac{v_i}{\|v_i\|}, \frac{v_i}{\|v_i\|} \right\rangle = \frac{1}{\|v_i\|^2} \langle v_i, v_i \rangle = \frac{\|v_i\|^2}{\|v_i\|^2} = 1.$

Teorema Sia $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, e sia $v \in \mathbb{R}^n$. Allora

$$v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \dots + \langle v, v_m \rangle v_m$$

cioè quando vado a scrivere v come comb. lin. di $v_1, \dots, v_m$ il coefficiente davanti ad un certo v_i è proprio $\langle v, v_i \rangle$.

Dim. Essendo $\{v_1, \dots, v_m\}$ una base possiamo scrivere in modo unico

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

per opportuni coeff. $a_1, \dots, a_m$. Ora calcolo $\langle v, v_i \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle v, v_i \rangle &= \langle a_1 v_1 + \dots + a_m v_m, v_i \rangle && \text{(uso linearità prod. scal.)} \\ &= a_1 \langle v_1, v_i \rangle + \dots + a_m \langle v_m, v_i \rangle \\ &\quad \downarrow \text{solo tutti nulli tranne quello con} \\ &\quad \text{indice } i, \text{ che viene } 1 \\ &= a_i \langle v_i, v_i \rangle = \boxed{a_i} \end{aligned}$$

Variazione del teorema Se $\{v_1, \dots, v_m\}$ sono una base ortogonale, allora

$$v = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \dots + \frac{\langle v, v_m \rangle}{\langle v_m, v_m \rangle} v_m.$$

Dim. Come sopra $\langle v, v_i \rangle = a_i \langle v_i, v_i \rangle \Rightarrow a_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} = \frac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}.$

Domanda: dato un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, come trovo una base ortonormale?

Risposta: procedimento di ORTOGONALIZZAZIONE di GRAM SCHMIDT

Questo procedimento prende

- in INPUT un sistema di vettori $\{v_1, \dots, v_k\}$ di $\mathbb{R}^n$ lin. indep.
- in OUTPUT un sistema di vettori $\{w_1, \dots, w_k\}$ di $\mathbb{R}^n$ lin. indep. che sono ortogonali e b.c. $\text{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = \text{Span}\{w_1, \dots, w_k\}$

Quindi se $\{v_1, \dots, v_k\}$ generavano un certo sottospazio, anche $\{w_1, \dots, w_k\}$ generano lo stesso sottospazio.

Una volta ottenuta la base ortogonale, è facile averla ortonormale. Il procedimento è tale che

$$\underbrace{\text{Span}\{v_1, \dots, v_k\}}_{\text{Span dei primi } R} = \underbrace{\text{Span}\{w_1, \dots, w_k\}}_{\text{Span dei primi } R} \quad \text{per ogni } R \leq k$$

Come funziona?

- Si pone $w_1 = v_1$. È chiaro che $\text{Span}\{v_1\} = \text{Span}\{w_1\}$.

- Si pone $w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$ Vediamo perché.

Poniamo in generale $w_2 = v_2 + a w_1$. È chiaro che

$$\text{Span}\{w_2, w_1\} = \text{Span}\{v_2 + a v_1, v_1\} = \text{Span}\{v_2, v_1\}$$

↑
perché lo span non cambia se cambio 1 vettore con una combinazione di lui + un po' degli altri.

Cerco a in modo tale che $\langle w_2, w_1 \rangle = 0$. Allora

$$0 = \langle v_2 + a w_1, w_1 \rangle = \langle v_2, w_1 \rangle + a \langle w_1, w_1 \rangle \quad \text{da cui}$$

$$a = - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}$$

- Si pone $w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2$

Perché funziona? Poichiamo in generale $w_3 = v_3 + a w_1 + b w_2$.

Allora

$$\begin{aligned} \text{Span} \{w_1, w_2, w_3\} &= \text{Span} \{w_1, w_2, v_3 + a w_1 + b w_2\} \\ &= \text{Span} \{w_1, w_2, v_3\} \\ &= \text{Span} \{v_1, v_2, v_3\}. \end{aligned}$$

Più importante: voglio che $\langle w_3, w_1 \rangle = \langle w_3, w_2 \rangle = 0$. Allora

$$\begin{aligned} 0 = \langle w_3, w_1 \rangle &= \langle v_3 + a w_1 + b w_2, w_1 \rangle \\ &= \langle v_3, w_1 \rangle + a \langle w_1, w_1 \rangle + b \langle w_2, w_1 \rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle}. \quad \text{Analogamente}$$

$$\begin{aligned} 0 = \langle w_3, w_2 \rangle &= \langle v_3 + a w_1 + b w_2, w_2 \rangle \\ &= \langle v_3, w_2 \rangle + a \langle w_1, w_2 \rangle + b \langle w_2, w_2 \rangle \end{aligned}$$

$$\text{da cui } b = - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle}$$

- In generale, supponendo di aver definito $w_1, \dots, w_R$ si pone

$$w_{R+1} = v_{R+1} - \frac{\langle v_{R+1}, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \dots - \frac{\langle v_{R+1}, w_R \rangle}{\langle w_R, w_R \rangle} w_R$$

$$= v_{R+1} - \sum_{i=1}^R \frac{\langle v_{R+1}, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i$$

— 0 — 0 —