

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 30

Titolo nota

15/11/2013

Abbiamo visto:

- R-rango e C-rango non cambiano facendo Gauss
- R-rango = C-rango per le matrici a scala (= numero righe $\neq 0$)
- D-rango $\leq$ R-rango e D-rango $\leq$ C-rango sempre.

Da queste segue che D-rango $\leq$ R-rango = C-rango sempre.

Resta da vedere che D-rango $\geq$ R-rango.

Per fare questo devo dimostrare il seguente enunciato:

se in una matrice ci sono almeno r righe lin. indip., allora c'è almeno un minore $r \times r$ con $\det \neq 0$.

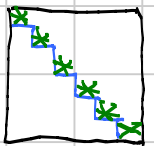
— 0 — 0 —

Pentesi: prendiamo una matrice quadrata $n \times n$ con n righe lin. indip.

Questa matrice ha R-rango = n .

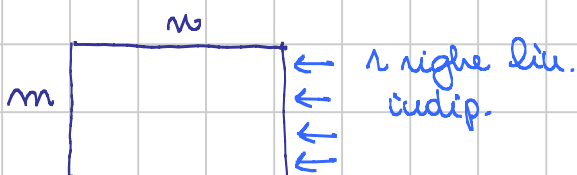
Quindi quando la riduco a scala vengono tutti gradini da uno, cioè c'è un pivot su ogni colonna.

Quindi $\det = \text{prodotto pivot} \neq 0$.



— 0 — 0 —

Dimostro enunciato iniziale



Elimino le altre righe e trovo un minore $r \times n$ con r righe lin. indip.



Questa matrice ha R-rango = r , quindi ha C-rango = r , quindi ha r colonne lin. indip. Elimino le altre colonne e resta una $r \times r$ con r colonne lin. indip., quindi anche r righe lin. indip., quindi $\det \neq 0$.



D'ora tu poi parliamo di rango senza precisare R-C-D.

Come si calcola il rango:

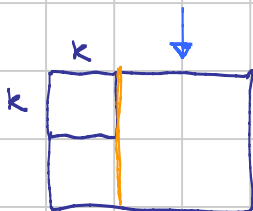
1° modo: algoritmo di Gauss

2° modo: usando il D-rango: se trovo un minore $k \times k$ con $\det \neq 0$ allora il rango è $\geq k$ e passo ai minori $(k+1) \times (k+1)$.

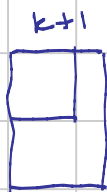
Fatto: Supponiamo di aver trovato un minore $k \times k$ con $\det \neq 0$, e supponiamo che $\text{rango} \geq k+1$.

Allora esiste un minore $(k+1) \times (k+1)$ con $\det \neq 0$ che contiene il precedente,

Dici.



Le colonne del minore sono lin. indip., quindi le colonne della matrice grande con. sono lin. indep. Se $\text{rango} \geq k+1$, vuol dire che c'è un'altra colonna indipendente da queste



→ ha C-rango $k+1$, quindi ha R-rango $k+1$, quindi ha $k+1$ righe lin. indep.

Cancellando il resto ho ottenuto il minore voluto.

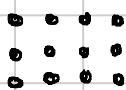
— 0 — 0 —

Esercizio Quanti sono i minori 2×2 di una 2×3 ?



Devo cancellare una colonna su 3, quindi 3 possibilità.

Quanti sono i minori 2×2 di una 3×4 ?



Devo cancellare 1 riga su 3 → 3 possibilità
" " 2 colonne su 4 → $\binom{4}{2}$ possibilità } $3 \cdot 6 = 18$

Quanti sono i minori $R \times k$ di una $m \times n$? $\binom{m}{R} \cdot \binom{n}{k}$

scegliere R righe su m

scegliere k colonne su n

BACK TO LINEAR SYSTEMS

$Ax = b$. Il sistema ha soluzione $\Leftrightarrow b \in \text{Span}$ colonne di A .

Consideriamo la matrice completa $A' = (A|b)$

Fatto generale $\text{rank}(A') = \begin{cases} \nearrow \text{rank}(A) \\ \searrow \text{rank}(A) + 1 \end{cases}$

(se attacco una colonna il rango o resta invariato, o sale di 1. Idem se attacco una riga)

Teorema di ROUCHÉ-CAPELLI

Un sistema lineare ammette soluzione $\Leftrightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(A')$

Quando il sistema ammette soluzioni, l'insieme delle soluzioni dipende da un certo numero di parametri uguale alla $\dim(\ker(A))$. Quindi il numero dei parametri è

$$\dim(\ker(A)) = n - \dim(\text{Im}(A)) = n - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{numero variabili}}}{\text{rango}(A)}$$

Esercizio Studiare, al variare di λ , il numero di soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} \lambda x + y + 2z &= 1 \\ x - y + 2\lambda z &= 2 \\ x + z &= \lambda \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2\lambda \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
 $\text{Det} = 1$

$$\text{rango}(A) \geq 2.$$

$$\text{Det}(A) = -\lambda + 2\lambda + 2 - 1 = \lambda + 1$$

Se $\lambda \neq -1 \leadsto \text{rango}(A) = 3 \Rightarrow \text{rango}(A') = 3 \Rightarrow$ soluzione che è pure unica per via delle dimensioni

Se $\lambda = -1 \leadsto$ sostituisco e risolvo.

Esercizio Consideriamo in $\mathbb{R}^4$

$$V = \text{span} \{ (1, 0, -1, 2), (2, 3, 1, 4) \}$$

$$W = \text{span} \{ (0, 1, 0, 1), (0, 2, 2, 2), (1, 0, 2, 3) \}$$

$$\dim V, \dim W, \dim(V+W), \dim(V \cap W)$$

$$\dim V = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

$$\dim W = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

$$\dim(V+W) = \dim(\text{span}(\underbrace{5}_{\text{vettori}})) = \text{rank} \begin{matrix} 5 & \boxed{4} \\ \hline \end{matrix}$$