

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 29

Titolo nota

15/11/2013

RANGO di una matrice

Def. Sia $A \in M_{m \times n}$ una matrice (dimensioni qualunque). Si definisce

- R-rango il massimo numero di righe lin. indip.
- C-rango " " " colonne " "
- D-rango il più grande k per cui A ammette un minore $k \times k$ con determinante $\neq 0$.

Proprietà semplici L' R-rango è uguale

- (i) il più grande k per cui A ammette k righe lin. indip.
- (ii) la dimensione del sottospazio generato dalle righe. Cioè, dette $R_1, \dots, R_m$ le righe $\dim(\text{Span}(R_1, \dots, R_m))$
- (iii) la dimensione dell'immagine dell'applic. ... matrice A^t .

Il C-rango è uguale

- (i) il più grande k per cui A ammette k colonne lin. indip.
- (ii) dette $C_1, \dots, C_n$ le colonne $C\text{-rango} = \dim \text{Span}(C_1, \dots, C_n)$
- (iii) la dimensione dell'immagine dell'applicazione lineare rappresentata dalla matrice A

Osservazione

$$\dim(\text{Im}(A)) + \dim(\text{Ker}(A)) = n$$

$\uparrow$ C-rango(A) $\uparrow$ dim. sp. portanza

Fatti importanti (rango e algoritmo di Gauss)

- (1) Le operazioni dell'algoritmo di Gauss non cambiano il rango
- (2) Se A è una matrice a scala, allora

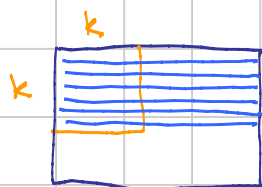
$$R\text{-rango} = C\text{-rango} = D\text{-rango} = \text{numero di righe non nulle} \\ = \text{numero dei PIVOT.}$$

Teorema Per ogni matrice A si ha che

$R\text{-rango} = C\text{-rango} = D\text{-rango} = \text{numero di righe non nulle al termine dell'alg. di Gauss.}$

Ovvio: Se A è $m \times n$, allora il suo rango al max vale il più piccolo tra m ed n .

Dim. che $R\text{-rango} \geq D\text{-rango}$ Indichiamo $R\text{-rango} = r$. Voglio dim. che $D\text{-rango} \leq r$. Prendiamo un minore $k \times k$ con $k \geq r+1$. Questo minore ha almeno $r+1$ righe. Queste non possono essere tutte lin. indip., quindi il det del minore è 0.

 } queste righe sono lin. dip. come righe della matrice grande, quindi sono lin. dip. anche come righe della matrice piccola.

Dim. che $C\text{-rango} \geq D\text{-rango}$ Stessa cosa, scambiando righe con colonne.

Dim. che alg. di Gauss non cambia $R\text{-rango}$

① Scambiare 2 righe non può cambiare l' $R\text{-rango}$

② Siano $R_1, \dots, R_m$ le righe della matrice. Sostituisco R_1 con $\hat{R}_1 = a_1 R_1 + a_2 R_2 + \dots + a_m R_m$ purché $a_1 \neq 0$. Allora

$$\underbrace{\text{Span}(R_1, R_2, \dots, R_m)}_{R\text{-rango prima}} = \underbrace{\text{Span}(\hat{R}_1, R_2, \dots, R_m)}_{R\text{-rango dopo}}$$

Sia $w \in \text{Span}(\hat{R}_1, R_2, \dots, R_m)$. Questo vuol dire che

$$w = c_1 \hat{R}_1 + c_2 R_2 + \dots + c_m R_m$$

$$= c_1 (a_1 R_1 + \dots + a_m R_m) + c_2 R_2 + \dots + c_m R_m$$

$$= c_1 a_1 R_1 + (c_1 a_2 + c_2) R_2 + \dots + (c_1 a_m + c_m) R_m$$

$$\Rightarrow w \in \text{Span}(R_1, R_2, \dots, R_m)$$

Viceversa, se $w \in \text{Span}(R_1, R_2, \dots, R_m)$, allora

$$w = c_1 R_1 + c_2 R_2 + \dots + c_m R_m$$

$$R_1 = \frac{1}{a_1} \hat{R}_1 - \frac{a_2}{a_1} R_2 - \dots - \frac{a_m}{a_1} R_m$$

$$= c_1 \left(\frac{1}{a_1} \hat{R}_1 - \frac{a_2}{a_1} R_2 - \dots - \frac{a_m}{a_1} R_m \right) + c_2 R_2 + \dots + c_m R_m$$

$$= \frac{c_1}{a_1} \hat{R}_1 + \left(c_2 - c_1 \frac{a_2}{a_1} \right) R_2 + \dots + \left(c_m - c_1 \frac{a_m}{a_1} \right) R_m$$

$$\Rightarrow w \in \text{Span}(\hat{R}_1, R_2, \dots, R_m)$$

Dim. che alg. di Gauss non cambia C-rango

Sia A una matrice, e sia A' ottenuta da A mediante operazioni alla Gauss

$$\text{C-rango}(A) = \dim(\text{Im}(A)) = n - \dim(\ker(A))$$

"soluzioni di $Ax = 0$

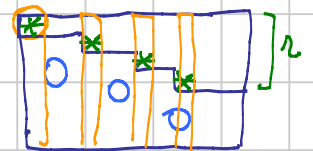
"soluzioni di $A'x = 0$ perché

Gauss non cambia le soluzioni del sistema

$$= n - \dim(\ker(A')) = \dim(\text{Im}(A')) = \text{C-rango}(A').$$

Dim. che C-rango = R-rango = numero di righe non nulle per le matrici a scala.

Prendiamo una matrice a scala con r righe non nulle.



È del tutto ovvio che $\text{R-rango} \leq r$. Resta da dimostrare che $R_1, \dots, R_r$ sono lin. indip. Questo è vero perché una qualunque comb. lin. di $\uparrow$ che sia 0 deve avere coeff. 0 su R_1 , ma allora deve essere coeff. 0 anche sulla seconda riga, e così via.

Dim. che $C\text{-rang} \leq r$. Infatti

$C\text{-rang} = \dim(\text{Span}(c_1, \dots, c_n))$, ma $\text{Span}(c_1, \dots, c_n) \subseteq \text{Span}(e_1, \dots, e_r)$
dove $e_1, \dots, e_r$ sono i primi r vettori canonici.

Ora devo trovare r colonne lin. indip.

Basta prendere le r colonne con i pivot.

Qui vale lo stesso discorso fatto prima per le righe. Volendo!

"girando" quelle colonne si ottiene a sua volta una matrice a scala.