

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 28

Titolo nota

08/11/2013

- Applicazioni del Det:
- ① Formula per matrice inversa
 - ② Formula di CRAMER
 - ③ Formula per vettori perpendicolari

① **MATRICE INVERSA** Data una matrice A $n \times n$, trovare la matrice inversa (posto che esista)

1° modo già visto: $(A|I)$ e lavoro alla Gauss fino ad ottenere qualcosa del tipo $(I|B)$.
Allora $B = A^{-1}$. Se strada facendo viene una riga nulla, allora l'inversa non esiste.

2° modo: con i determinanti. Intanto esiste l'inversa se e solo se $\det(A) \neq 0$.

Come si calcola l'inversa:

- 1 - A_{ij}
- 2 - Aggiusto i segni
- 3 - Trasposta
- 4 - Divido per $\det A$

Data la matrice $A = \{a_{ij}\}$, costruisco la matrice $\{\det A_{ij}\}$, quindi al posto di a_{ij} metto $\det(A_{ij})$.

Poi cambio i segni con la solita regola

Faccio la trasposta

Divido per $\det A$

Esempio 2×2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{det } A_{ij}} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{segni a posto}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{trasposta}} \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Esempio 3x3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det: } 2+0+2-0-0-1=3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Det Arg

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Segui ok

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Trasposta

$$\rightsquigarrow \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Divido per Det

Controllare che venga uguale con Gauss.

— 0 — 0 —

FORMULA DI CRAMER

Consideriamo un sistema lineare $n \times n$

$Ax = b$, con A matrice $n \times n$

(sistema quadrato).

Per fatti già detti, c'è soluzione unica se e solo se le colonne di A sono linearmente indip. Ora questo è equivalente a $\det A \neq 0$.

In questo caso la soluzione è del tipo

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

dove

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$$

dove A_i è la matrice ottenuta da A sostituendo la colonna i -esima con b .

Esempio

$$2x + y + 3z = 1$$

$$x + y - z = -1$$

$$x - y + 5z = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$x = \frac{\det A_1}{\det A}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$y = \frac{\det A_2}{\det A}$$

$$z = \frac{\det A_3}{\det A}$$

— 0 — 0 —

FORMULA PER VETTORI PERPENDICOLARI

Prendo 2 vettori in $\mathbb{R}^3$: (x_1, y_1, z_1) (x_2, y_2, z_2)

Obiettivo: produrre un vettore perpendicolare ad entrambi.

Penso FORMALMENTE al determinante

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

Penso allo sviluppo di Laplace rispetto alla 1ª riga

$$e_1 (y_1 z_2 - z_1 y_2) - e_2 (x_1 z_2 - z_1 x_2) + e_3 (x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

$$= \underbrace{(y_1 z_2 - z_1 y_2)}_{\det A_{11}} - \underbrace{x_1 z_2 + z_1 x_2}_{-\det A_{1,2}} + \underbrace{x_1 y_2 - y_1 x_2}_{\det A_{1,3}}$$

$$\underbrace{x_1 \det A_{11} - y_1 \det A_{1,2} + z_1 \det A_{1,3}}_{\text{prod. scalare tra } (x, y_1, z_1) \text{ e vett. mist.}} = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} = 0$$

2 righe uguali

sviluppo rispetto alla 1ª riga

Analogamente: prod. scalare tra (x_2, y_2, z_2) e vett. mist. =

$$= x_2 \det A_{11} - y_2 \det A_{1,2} + z_2 \det A_{1,3} = \det \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} = 0$$

sviluppo risp. 1ª riga.

Lo stesso discorso vale in ogni dimensione; supponiamo che in $\mathbb{R}^4$ voglio trovare un vettore perp. a 3 vettori dati

$$(x_1, y_1, z_1, w_1)$$

$$(x_2, y_2, z_2, w_2)$$

$$(x_3, y_3, z_3, w_3)$$

~~(e_1, e_2, e_3, e_4)~~

Le 4 componenti del vettore saranno

~~(x_1, y_1, z_1, w_1)~~

~~(x_2, y_2, z_2, w_2)~~

$(\text{Det } A_{1,1}, -\text{Det } A_{1,2}, \text{Det } A_{1,3}, -\text{Det } A_{1,4})$

~~(x_3, y_3, z_3, w_3)~~

Fare il prodotto scalare tra vett. trovato ed uno dei 3 dati viene 0
perché è come sviluppare il Det della matrice 4×4 in cui la
prima riga è il vettore dato in considerazione

— 0 — 0 —

Perché funziona CRAMER

Indichiamo con $C_1, \dots, C_n$ le
colonne della matrice A .

Supponiamo che $(x_1, \dots, x_n)$ sia soluzione, cioè

$$x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_n C_n = b$$

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ C_1 & C_2 & & C_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ & b & & \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

↑
colonna i

quindi

colonna i



$$\text{Det } A_i = \text{Det} \left(C_1 \mid C_2 \mid \dots \mid \underbrace{x_1 C_1 + \dots + x_n C_n}_{\substack{\uparrow \\ \text{comb. lineare} \\ \text{che esce fuori}}} \mid C_{i+1} \mid \dots \mid C_n \right)$$

comb. lineare
che esce fuori

$$= x_1 \text{Det} (C_1 \mid C_2 \mid \dots \mid C_1 \mid \dots \mid C_n) + x_2 \text{Det} (C_1 \mid C_2 \mid \dots \mid C_2 \mid \dots \mid C_n) + \dots$$

↓
questi sono tutti nulli tranne
quello i -esimo, che viene $\text{Det } A$

Ho ottenuto che $\text{Det } A_i = x_i \cdot \text{Det } A$, da cui ricavo x_i