

ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 27

Titolo nota

08/11/2013

Determinante

Proprietà basic: $(\text{Det } 1), \dots, (\text{Det } 4)$



Alternanza, $\text{Det} = 0$ se i vettori sono lin. DIP.



Le operazioni dell'algoritmo di Gauss ultra-ortodosso cambiano al + il segno del determinante, determinante delle matrici triangolari superiori



Procedura operativa per il calcolo del Determinante (posto che esista una funzione che verifica le proprietà basic)



Unicità del Determinante

— 0 — 0 —

Cosa è rimasto? ① Che esiste effettivamente una funzione che soddisfa le basic

② Se i vettori sono lin. INDIP. $\Rightarrow \text{Det} \neq 0$

— 0 — 0 —

Come si dimostra l'esistenza? Per induzione usando gli sviluppi di LAPLACE per colonne.

Teorema misterioso

Lo sviluppo di LAPLACE rispetto alla prima colonna fornisce una funzione che verifica $(\text{Det } 1), \dots, (\text{Det } 4)$ in ogni dimensione.

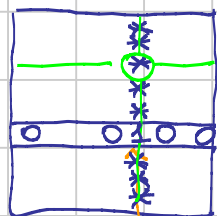
Più in generale, lo sviluppo rispetto ad una qualunque colonna verifica $(\text{Det } 1), \dots, (\text{Det } 4)$.

— 0 — 0 —

Corollario Dim. il teo. misto, per forza tutti gli sviluppi rispetto alle colonne danno lo stesso risultato (perché per unicità c'è al max. una funzione che verifica le basic)

Teorema Tutti gli sviluppi per riga danno come risultato il Det, quindi in particolare danno tutti lo stesso risultato.

Dim. **Caso più semplice** Caso in cui faccio lo sviluppo rispetto ad una riga che contiene tutti 0 ed un 1.



colonna
j-esima

← riga i-esima

Sviluppo diventa:

$$\underbrace{(-1)^{i+j}}_{\text{segno}} \underbrace{1}_{a_{ij}} \cdot \det A_{ij}$$

Per calcolare il Det, faccio lo sviluppo secondo la colonna j-esima:

$$\underbrace{(-1)^{i+j}}_{\text{segno}} \underbrace{1}_{a_{ij}} \cdot \det A_{ij} + \sum_{k \neq i} (-1)^{k+j} a_{k,j} \underbrace{\det A_{k,j}}_{\substack{\text{perché la matrice } A_{k,j} \text{ ha} \\ \text{una riga di tutti 0,}}}$$

Quindi nel caso semplice, Det coincide con lo sviluppo rispetto a quella riga.

Caso semi-semplice Caso in cui la riga è del tipo $0, \dots, 0, \lambda, 0, \dots, 0$. Stesso discorso, solo che al posto di 1 c'è λ (oppure volendo: le costanti escono fuori).

Caso generale Se la riga contiene tanta roba: $a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}$. Allora il Det è uguale alla somma dei determinanti delle varie matrici in cui lascio un termine e metto gli altri $= 0$.

$$\det \begin{bmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{i,1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & a_{i,2} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \dots$$

e così ottengo lo sviluppo per riga.

— 0 — 0 —

Conseguenze degli sviluppi di LAPLACE

- ① $\text{Det } A = \text{Det } A^t$
- ② Metodo operativo per il calcolo dei determinanti, oltre a Gauss.

Esempio

Det $\begin{pmatrix} 13 & 0 & 8 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 9 & 4 & 1 \\ 22 & 0 & 10 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ Sviluppo rispetto 3^a riga

$$= - \text{Det} \begin{pmatrix} 13 & 0 & 8 & 0 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 0 & 9 & 1 \\ 22 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\text{2}^{\text{a}} \text{ colonna} \\ \downarrow}}{=} -5 \text{Det} \begin{pmatrix} 13 & 8 & 0 \\ 5 & 9 & 1 \\ 22 & 10 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\text{3}^{\text{a}} \text{ colonna} \\ \downarrow}}{=} 5 \text{Det} \begin{pmatrix} 13 & 8 \\ 22 & 10 \end{pmatrix}$$
$$= 5 (13 \cdot 10 - 22 \cdot 8) = \dots$$

— 0 — 0 —

Sviluppi di LEIBNITZ

$$2 \times 2: \text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$3 \times 3: \text{Det} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \boxed{aei} + \boxed{bfg} + \boxed{cdh} - ceg - bdi - afh$$

In ogni prodotto c'è sempre un elemento di ogni riga ed un elemento di ogni colonna. Non solo: ci sono tutti i possibili prodotti di questo tipo, che sono $n!$ (ho a disposizione n elementi della 1^a riga, poi $n-1$ della 2^a diversi dal precedente, $n-2$ nella 3^a, e così via)

Supponiamo nel 3×3 di sviluppare le formule

$$\text{Det}(ae_1 + be_2 + ce_3, de_1 + ee_2 + fe_3, ge_1 + he_2 + ie_3)$$

veggono 27 termini ciascuno composto da un coeff della 1ª riga, uno della 2ª e 1 della terza, il tutto moltiplicato per $\text{Det}(e_i, e_j, e_k)$.

Sopravvivono, con coeff. $\neq 0$, solo quelli con 3 indici diversi.

I sopravvissuti sono $+0-1$ a seconda che diventano la base canonica con un numero pari o dispari di scambi.

$$\begin{aligned}\text{Ad esempio: } bfg \text{Det}(e_2, e_3, e_1) &= -bfg \text{Det}(e_1, e_3, e_2) \\ &= bfg \text{Det}(e_1, e_2, e_3).\end{aligned}$$

$$bdi \text{Det}(e_2, e_1, e_3) = -bdi \text{Det}(e_1, e_2, e_3)$$

In generale: in un determinante $n \times n$ compaiono $n!$ addendi

- ogni addendo è il prodotto di n elementi della matrice, presi uno per riga ed uno per colonna
- il segno $+0-$ dipende da quanti scambi servono per trasformare i corrispondenti vettori della base nella base canonica.

— 0 — 0 —