

### Determinante di matrici DIAGONALI

Una matrice diagonale è fatta così  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} = D$

dove  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sono numeri dati arbitrari (anche 0). Il resto sono tutti zeri. In questo caso

$$\det(D) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

**Dim.**

$$\begin{aligned} \det(D) &= \det(\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, \dots, \lambda_n e_n) \\ &= \lambda_1 \det(e_1, \lambda_2 e_2, \dots, \lambda_n e_n) \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \det(e_1, e_2, \lambda_3 e_3, \dots, \lambda_n e_n) \\ &= \dots \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \det(e_1, e_2, \dots, e_n) \\ &= 1 \text{ per } (\det I) \end{aligned}$$

### Determinante di matrici TRIANGOLARI SUPERIORI

Matrici con tutti o "sotto la diagonale"

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ & \lambda_2 & \text{roba} & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} = T$$

$$\det T = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

"E' come se fosse diagonale"

**Dim.**  $\det T = \det(v_1, \dots, v_n) = \det(\lambda_1 e_1 + w_1, v_2, \dots, v_n)$

Ho scritto  $v_1 = \lambda_1 e_1 + \underbrace{c_2 e_2 + c_3 e_3 + \dots + c_n e_n}_{w_1}$

$w_1$  e ha componenti solo rispetto a  $e_2, \dots, e_n$

$$\det T = \lambda_1 \det(e_1, v_2, \dots, v_n) + \underbrace{\det(w_1, v_2, \dots, v_n)}_{0}$$

Dove stanno i vettori  $u_1, u_2, \dots, u_m$ ? Stanno nel sottospazio generato da  $e_2, \dots, e_n$  (perché hanno 0 come prima componente).

Quindi sono  $m$  vettori in uno spazio di dimensione  $(n-1)$ , quindi sono linearmente dipendenti, quindi il loro Det è 0.

Procedendo allo stesso modo [fine ancora un passaggio a mano per verificare di aver capito il trucco]

$$\begin{aligned} \text{Det } T &= \lambda_1 \text{Det}(e_1, u_2, \dots, u_m) = \lambda_1 \lambda_2 \text{Det}(e_1, e_2, u_3, \dots, u_m) \\ &= \dots = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \underbrace{\text{Det}(e_1, e_2, \dots, e_n)}_{=1} \\ &\quad \text{--- } 0 \text{ --- } 0 \text{ ---} \end{aligned}$$

Conseguenza: data una matrice qualunque, con Gauss arrivo in forma triangolare. Allora

$$\text{Det}(\text{matrice iniziale}) = \text{Det}(\text{triangolare finale}) \cdot \left(\frac{\pm 1}{1}\right)$$

a seconda di quanti scambi di riga ho fatto.

Occhio: serve GAUSS ULTRA-ORTODOSSO

~> Metodo di calcolo dei determinanti pratico

~> Dimostrazione del teorema di unicità in generale (se esiste una funzione con le proprietà  $(\text{Det}_1), \dots, (\text{Det}_4)$ , allora il suo valore è ben determinato e si calcola in questo modo).

Oss. Facendo l'algoritmo di Gauss in tanti modi posso ottenere matrici  $\nabla$  finali diverse, ma tutte avranno uguale il prodotto degli elementi sulla diagonale.

--- 0 --- 0 ---

## SVILUPPI DI LAPLACE PER COLONNE

**MINORI** Un minore di una matrice è una qualunque sottomatrice ottenuta cancellando un po' di righe ed un po' di colonne dalla matrice originaria.

Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ è un minore } 2 \times 2$$

Notazione Data una matrice  $n \times n$   $A$ , si indicano con  $a_{ij}$  i suoi elementi, e con  $A_{i,j}$  i minori  $(n-1) \times (n-1)$  ottenuti cancellando la riga  $i$  e la colonna  $j$ .

Esempio  $n=4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$$
$$a_{3,2} = 6$$
$$A_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Gli sviluppi di LAPLACE permettono di calcolare il Det di una matrice  $n \times n$  a patto di saper fare i determinanti  $(n-1) \times (n-1)$ .

Sviluppo di Laplace rispetto alla 1ª colonna

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = A \quad \text{Det } A = a_{1,1} \cdot \text{Det } A_{1,1} - a_{2,1} \cdot \text{Det } A_{2,1} + a_{3,1} \cdot \text{Det } A_{3,1}$$

$$= 1 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - 10 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot 5 - 10 \cdot 10 + 2 \cdot (8 - 3) = 5 - 100 + 10 = -85$$

(controllare che venga la stessa cosa con SARRUS e GAUSS)

### Sviluppo di Laplace rispetto alla 3ª colonna

$$\text{Det } A = a_{1,3} \cdot \text{Det } A_{1,3} - a_{2,3} \cdot \text{Det } A_{2,3} + a_{3,3} \cdot \text{Det } A_{3,3}$$

$$= 3 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - 4 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 3(-2) - 4(-4) + 5(1-20) = -6 + 16 - 95 = -85$$

Morale: gli sviluppi di LAPLACE li posso fare rispetto ad una qualunque colonna, ma anche rispetto ad una qualunque riga. Viene sempre il determinante !!!

Come metterli i segni: secondo questo schema.

Detto formalmente: davanti a

$a_{ij}$  Det  $A_{ij}$  metterò  $(-1)^{i+j}$

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| + | - | + | - | + |
| - | + | - | + | - |
| + | - | + | - | + |
| - | + | - | + | - |

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = A$$

Sviluppando secondo la 2ª riga:

$$-10 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + 1 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} - 4 \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \dots$$

controllare che venga -85.

— 0 — 0 —

Dando per buoni gli sviluppi di LAPLACE è immediato che

$$\text{Det } A = \text{Det } A^t$$

Dim. Gli sviluppi per riga di A sono quelli per colonna di  $A^t$ .