

③ Conseguenze delle proprietà basic

(Det 5) Se scambio v_i e v_j , allora il determinante cambia di segno:

$$\text{Det}(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = - \text{Det}(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots)$$

(Det 6) Se al posto di v_i metto la combinazione lineare di un po' di vettori, allora la combinazione lineare esce fuori

$$\text{Det}(\dots, c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_k w_k, \dots) = c_1 \text{Det}(\dots, w_1, \dots) + c_2 \text{Det}(\dots, w_2, \dots) + \dots + c_k \text{Det}(\dots, w_k, \dots)$$

(Det 7) Se i vettori $v_1, \dots, v_m$ sono linearmente dipendenti, allora $\text{Det}(v_1, \dots, v_m) = 0$.

Dim di Det 5 $\text{Det}(\dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots) = 0$ (Det 2)

$\uparrow$ pos. i $\uparrow$ pos. j

$$= \text{Det}(\dots, v_i, \dots, v_i + v_j, \dots) + \text{Det}(\dots, v_j, \dots, v_i + v_j, \dots)$$

$$= \text{Det}(\dots, v_i, \dots, v_i, \dots) + \text{Det}(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) + \text{Det}(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots) + \text{Det}(\dots, v_j, \dots, v_j, \dots)$$

$\overset{0}{\text{}} \text{ (Det 2)}$

$\overset{0}{\text{}} \text{ (Det 2)}$

$\overset{0}{\text{}} \text{, quindi sono uno l'opposto dell'altro}$

Nota: La (Det 5) si chiama **ALTERNANZA**: se invertito 2 variabili, cambia il segno.

Dim. di (Det 6) "Si tirano prima fuori le somme con (Det 4), poi le costanti con (Det 3)"

Dim. di (Det 7) Supponiamo che $v_1, \dots, v_m$ siano lin. DIP.

Allora uno dei vettori è comb. lineare degli altri

(scrivo una comb. lineare $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$ e se i coeff. non sono tutti nulli, posso ricavare un vettore in funzione degli altri). Facciamo finta che sia v_1 :

$$v_1 = c_2 v_2 + \dots + c_n v_n.$$

Ma allora

$$\begin{aligned} \text{Det}(v_1, v_2, \dots, v_m) &= \text{Det}(c_2 v_2 + \dots + c_n v_n, v_2, \dots, v_m) \\ &= c_2 \text{Det}(v_2, v_2, \dots, v_m) + \dots + c_n \text{Det}(v_n, v_2, \dots, v_m) \end{aligned}$$

$\searrow \quad \quad \quad \searrow \quad \quad \quad \searrow$
 sono tutti nulli perché ci
 sono sempre 2 vettori uguali

$$= 0.$$

— 0 — 0 —

Oss. Nel caso $n=2$ abbiamo usato che $\text{det}(e_2, e_1) = -1$.

Questo segue dall'altezza: $\text{det}(e_2, e_1) = -\text{det}(e_1, e_2) = -1$

$\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad \text{alt.} \quad \quad \quad (\text{Det 1}).$

— 0 — 0 —

Caso $n=3$

$$\begin{aligned} v_1 &= (a, b, c) = a e_1 + b e_2 + c e_3 \\ v_2 &= (d, e, f) = d e_1 + e e_2 + f e_3 \\ v_3 &= (g, h, i) = g e_1 + h e_2 + i e_3 \end{aligned}$$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Det}(v_1, v_2, v_3) &= \text{Det}(a e_1 + b e_2 + c e_3, v_2, v_3) \\ &= a \text{Det}(e_1, v_2, v_3) + b \text{Det}(e_2, v_2, v_3) + c \text{Det}(e_3, v_2, v_3) \\ &= a \text{Det}(e_1, d e_1 + e e_2 + f e_3, v_3) + b \dots + c \dots \\ &= a d \text{Det}(e_1, e_1, v_3) + a e \text{Det}(e_1, e_2, v_3) + a f \text{Det}(e_1, e_3, v_3) \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

$\searrow$
 0 perché ci sono 2 e_1
 in totale sono venuti 9 termini

Ottenuti i 9 termini, sostituisco v_3 , sviluppo e ottengo 27 termini, di cui però molti sono nulli perché hanno 2 vettori uguali.

Fatti i conti (esercizio) resta

$$aei \operatorname{Det}(e_1, e_2, e_3) + bfg \operatorname{Det}(e_2, e_3, e_1) + cde \operatorname{Det}(e_3, e_1, e_2) +$$

$$+ ceg \operatorname{Det}(e_3, e_2, e_1) + bdi \operatorname{Det}(e_2, e_1, e_3) + afR \operatorname{Det}(e_1, e_3, e_2)$$

Sostanzialmente ci sono e_1, e_2, e_3 disposti in tutti i modi possibili

$$\operatorname{Det}(e_1, e_2, e_3) = 1 \quad (\operatorname{Det} 1)$$

$$\operatorname{Det}(\underbrace{e_3, e_2, e_1}_{\uparrow \text{alt}}) = - \operatorname{Det}(\underbrace{e_1, e_2, e_3}_{\uparrow \operatorname{Det} 1}) = -1$$

$$\operatorname{Det}(\underbrace{e_2, e_1, e_3}_{\uparrow \text{alt}}) = - \operatorname{Det}(e_1, e_2, e_3) = -1 = \operatorname{Det}(e_1, \underbrace{e_3, e_2}_{\uparrow \text{alt}})$$

$$\operatorname{Det}(e_2, \underbrace{e_3, e_1}_{\uparrow \text{alt}}) = - \operatorname{Det}(\underbrace{e_2, e_1, e_3}_{\uparrow \text{alt}}) = + \operatorname{Det}(e_1, e_2, e_3) = 1$$

$$\operatorname{Det}(e_3, \underbrace{e_1, e_2}_{\uparrow \text{alt}}) = - \operatorname{Det}(\underbrace{e_3, e_2, e_1}_{\uparrow \text{alt}}) = + \operatorname{Det}(e_1, e_2, e_3) = 1$$

Conclusione:

$$\operatorname{Det} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & R & i \end{pmatrix} = \underbrace{aei} + \underbrace{bfg} + \underbrace{cdR} - \underbrace{ceg} - \underbrace{bdi} - \underbrace{afR}$$

FORMULA DI SARRUS PER DETERMINANTE 3×3

① Si verifica che questa funzione ha le proprietà $(\operatorname{Det} 1), \dots, (\operatorname{Det} 4)$ quindi questo dimostra il te. di esistenza e unicità nel caso 3×3 .

②

Achtung! Vale solo per il determinante 3×3 e 2×2 .

Da $n=4$ in poi NON FUNZIONA !!

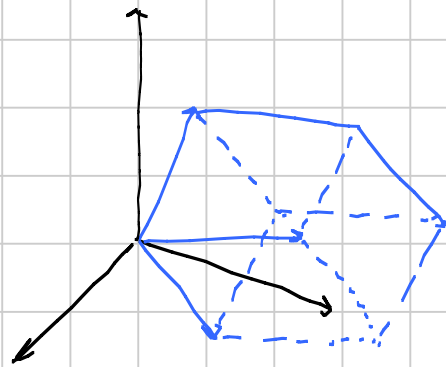
③ Interpretazione geometrica

Il Det 3×3 è il volume di un "parallelepipedo storto"

Se i vettori sono lin. DIP, il parallelepipedo degenera ed il volume viene 0.

Questo è un se e solo se

— 0 — 0 —



④ Determinante e algoritmo di Gauss

Cosa succede al Det se faccio operazioni alla Gauss?

→ Se scambio 2 righe, il determinante cambia di segno

→ Se sostituisco v_i con $a v_i + b v_j$, ho che

$$\begin{aligned} \text{Det}(\dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pos. } i}}{a v_i + b v_j}, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pos. } j}}{v_j}, \dots) &= a \text{Det}(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) \\ &\quad + b \text{Det}(\dots, v_j, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{v_j}, \dots) \\ &= a \text{Det}(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) \end{aligned}$$

Quindi se faccio l'operazione veta-ortodossa con $a=1$, il determinante non cambia, altrimenti viene moltiplicato per a .

Idea: con l'algoritmo di Gauss si semplifica la matrice fino ad ottenerne una per cui so calcolare il determinante.

— 0 — 0 —