

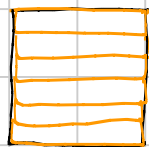
DETERMINANTE

Obiettivo ① : ho n vettori in $\mathbb{R}^n$ e voglio sapere se sono linearmente indipendenti

Obiettivo ② : ho k vettori in $\mathbb{R}^n$ e voglio sapere $\dim \text{Span} \{v_1, \dots, v_k\}$

Focalizziamoci su obiettivo 1, Il determinante si può vedere in due modi:

- 1 - come una funzione che prende in input n vettori di $\mathbb{R}^n$ e restituisce un numero: se il numero è 0 i vettori sono lin. DIP. se è $\neq 0$, i vettori sono lin. INDIP.
- 2 - come una funzione che prende in input una matrice $n \times n$ e restituisce un numero. La matrice va pensata come n vettori di $\mathbb{R}^n$ che sono le sue righe.

**INDICE**

- ① Proprietà BASIC del det
- ② Teorema di esistenza e unicità
- ③ Conseguenze delle proprietà basic
- ④ Determinante e algoritmo di Gauss
- ⑤ Sviluppi di LAPLACE per colonna
- ⑥ " " " per riga
- ⑦ Sviluppi di LEIBNITZ (con le permutazioni)
- ⑧ $\det A = \det A^t$
- ⑨ Teorema di BINET ($\det(AB) = \det A \cdot \det B$)
- ⑩ Formula di CRAMER (sistemi lineari $n \times n$)
- ⑪ Formula per matrice inversa con i determinanti
- ⑫ Formula misteriosa per vettori perpendicolari

① PROPRIETÀ BASIC

Notazioni: voglio costruire $\text{Det}(v_1, \dots, v_n)$ dove $v_1, \dots, v_n$ sono n vettori di $\mathbb{R}^n$.

Chiamo $e_1, \dots, e_n$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$:

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots) \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots)$$

Voglio che la funzione Det abbia queste proprietà:

(Det 1) $\text{Det}(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$ (in termini di matrici questo dice che $\text{Det}(\text{Id}) = 1$)

(Det 2) Se tra i vettori $v_1, \dots, v_n$ ce ne sono due uguali, diciamo $v_i = v_j$ per qualche $i \neq j$, allora

$$\text{Det}(v_1, \dots, v_n) = 0 \quad (\text{caso particolare in cui gli } n \text{ vettori non sono indipendenti})$$

(Det 3) Se moltiplico uno degli n vettori per λ , allora "il λ esce fuori"

$$\text{Det}(v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda v_i, v_{i+1}, \dots, v_n) = \lambda \text{Det}(v_1, \dots, v_n)$$

(Det 4) Comportamento rispetto alla somma: metto $\bar{v}_i + \hat{v}_i$ al posto di v_i

$$\text{Det}(v_1, \dots, \bar{v}_i + \hat{v}_i, \dots, v_n) = \text{Det}(v_1, \dots, \bar{v}_i, \dots, v_n) + \text{Det}(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$$

Oss. Le proprietà (Det 3) e (Det 4) ci dicono che il Determinante, come funzione dell' i -esimo vettore, è un' applicazione lineare (qualunque sia l'indice i)

② Teorema (Esistenza e unicità).

Per ogni intero $n \geq 1$ esiste un'unica funzione che soddisfa le proprietà (Det 1), (Det 2), (Det 3), (Det 4).

Quella funzione si chiama determinante.

— 0 — 0 —

$$\boxed{\text{Caso } n=2} \quad v_1 = (a, b) \quad v_2 = (c, d) \quad \text{Det}(v_1, v_2) = \text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{Intanto } v_1 = ae_1 + be_2 \quad v_2 = ce_1 + de_2$$

$$\text{Det}(v_1, v_2) = \text{Det}(ae_1 + be_2, v_2) \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{(Det 4) su 1}^\text{a comp}}}{=} \text{Det}(ae_1, v_2) + \text{Det}(be_2, v_2)$$

$$\stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{(Det 3) su} \\ \text{1}^\text{a comp}}}{=} a \text{Det}(e_1, v_2) + b \text{Det}(e_2, v_2)$$

$$= a \text{Det}(e_1, ce_1 + de_2) + b \text{Det}(e_2, ce_1 + de_2) \rightsquigarrow \text{(Det 4) su 2}^\text{a comp.}$$

$$= a \text{Det}(e_1, ce_1) + a \text{Det}(e_1, de_2) + b \text{Det}(e_2, ce_1) + b \text{Det}(e_2, de_2)$$

$$= ac \underset{\substack{0 \\ \text{(Det 2)}}}{\text{Det}(e_1, e_1)} + ad \underset{\substack{1 \\ \text{(Det 1)}}}{\text{Det}(e_1, e_2)} + bc \underset{\substack{-1 \\ \text{(Det 1)}}}{\text{Det}(e_2, e_1)} + bd \underset{\substack{0 \\ \text{(Det 2)}}}{\text{Det}(e_2, e_2)}$$

$-1 \uparrow$ vedremo dopo

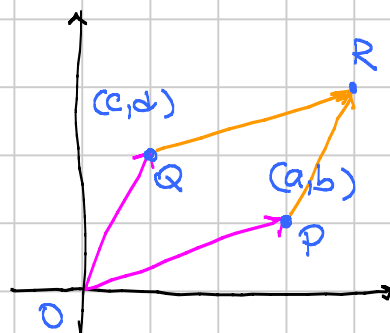
$$= ad - bc,$$

Abbiamo così dimostrato che per $n=2$, se c'è una funzione che verifica le proprietà, questa è $ad - bc$.

Ora è facile verificare che questa funzione soddisfa (Det 1), ..., (Det 4) (esercizio) per cui per $n=2$ abbiamo il teorema di esistenza e unicità.

Geometricamente

$$\text{Det}((a, b), (c, d)) = \pm \text{Area}(\text{OQRP}) = ad - bc$$



Quindi geometricamente il determinante svolge la sua funzione:

- se (a,b) e (c,d) sono lin. indep., il parallelogramma è "vero", quindi la area $\neq 0$
- se (a,b) e (c,d) sono lin. dip., cioè essendo in 2 variabili sono uno multiplo dell'altro, allora il parallelogramma è degenere, quindi la area nulla.

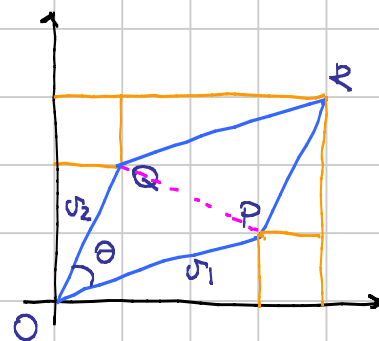
Concludendo: $\text{Det} = 0 \Leftrightarrow$ parallelogramma degenere
 $\Leftrightarrow$ vettori lin. DIP.

Dim. che $\text{Det} = \text{Area}$

1° modo: scomponi la figura in tanti rettangoli e triangoli

Le coordinate sono note, quindi le aree si calcolano (fare per esercizio)

Questa dim. ha problemi di configurazione.



2° modo Area parallelogramma =

$$2 \text{ Area } (OQP) = 2 \cdot \frac{1}{2} OQ \cdot OP \cdot \sin \theta$$

$$= \|OQ\| \cdot \|OP\| \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$$

$$= \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot \sqrt{1 - \frac{\langle v_1, v_2 \rangle^2}{\|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2}}$$

$$= \sqrt{\|v_1\|^2 \cdot \|v_2\|^2 - \langle v_1, v_2 \rangle^2}$$

$$= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2} = \dots \text{finire i conti} \\ = \sqrt{(ad - bc)^2}$$

Occhio quando si fa la radice:

$$\sqrt{(ad - bc)^2} = |ad - bc|$$