

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 23

Titolo nota

30/10/2013

Teorema misterioso (Teorema di sostituzione)

Sia V uno spazio vettoriale.

Sia $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V$ un insieme di vett. lin. indep.

Sia $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\} \subseteq V$ un insieme di generatori.

Allora

- $m \leq n$
- posso rimpiazzare m elementi di $\mathcal{B}$ con gli m elementi di $\mathcal{A}$ ottenendo ancora un insieme di generatori.

Dim. Dimostriamo per induzione su m .

Passo base: $m=1$ $\mathcal{A} = \{v_1\}$ e $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_n\}$.

È ovvio che $m \leq n$. Mostro che posso rimpiazzare uno dei w_i con v_1 ottenendo ancora dei generatori. Essendo $w_1, \dots, w_n$ generatori, posso scrivere

$$v_1 = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n$$

Ora $v_1 \neq 0$ (se no $\mathcal{A}$ non sarebbe lin. indep.), quindi almeno uno degli a_i sarà $\neq 0$. A meno di cambiare i nomi, sia $a_1 \neq 0$. Allora posso ricavare w_1

$$w_1 = \frac{1}{a_1} v_1 - \frac{a_2}{a_1} w_2 - \dots - \frac{a_n}{a_1} w_n \quad (\Delta)$$

Quindi w_1 è combinazione lineare di $v_1, w_2, \dots, w_n$. Dico che $\{v_1, w_2, \dots, w_n\}$ sono ancora generatori.

Ogni vettore che era comb. lin. di $w_1, w_2, \dots, w_n$ si può scrivere come comb. di $v_1, w_2, \dots, w_n$ (basta sostituire w_1 usando la formula (Δ)).

Passo induttivo

$$m-1 \Rightarrow m$$

Supponiamo che la tesi sia vera quando $\mathcal{A}$ ha $m-1$ elementi e dim. che la tesi è vera quando $\mathcal{A}$ ha m elementi.

$$\mathcal{A} = \{ \underbrace{v_1, \dots, v_{m-1}}_{\mathcal{A}'} , v_m \}$$

$$\mathcal{B} = \{ w_1, \dots, w_n \}$$

Per ipotesi induttiva sappiamo che $m-1 \leq n$ e che posso sostituire $m-1$ elementi di $\mathcal{B}$, diciamo $w_1, \dots, w_{m-1}$, con quelli di $\mathcal{A}'$ in modo da avere ancora generatori $\{ v_1, \dots, v_{m-1}, w_m, \dots, w_n \}$. Ora voglio sostituire un altro w_i con v_m .

Ne è rimasto qualcuno da sostituire? Sì! Se non ne fosse rimasto nessuno, avremmo che $\{ v_1, \dots, v_{m-1} \}$ sono generatori, ma allora

$$v_m = a_1 v_1 + \dots + a_{m-1} v_{m-1}$$

e portando tutto a sx avrei una comb. lin. dei v_i che fa 0 con un coeff. davanti a v_m che è $\neq 0$, quindi i v_i NON sarebbero lin. indip., il che è contro l'ipotesi.

Quindi $m \leq n$. Voglio fare la sostituzione. Come prima

$$v_m = a_1 v_1 + \dots + a_{m-1} v_{m-1} + \underbrace{a_m w_m + \dots + a_n w_n}_{\text{uno dei coeff. qui deve essere } \neq 0}$$

altrimenti come sopra i v_i non sarebbero indipendenti

Diciamo che $a_m \neq 0$. Ma allora si procede come nel caso $m=1$ ricambiando w_m in funzione del resto e facendo vedere che w_m si può sostituire con v_m , cioè

$$\{ v_1, \dots, v_{m-1}, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n \}$$

sono ancora generatori.

— o — o —

Prodotto di matrici

Sia A la matrice associata ad una applicazione lineare dopo aver scelto una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ in partenza ed una base $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$ in arrivo.

Le colonne $C_1, \dots, C_n$ della matrice sono le componenti di $f(e_1), \dots, f(e_n)$ rispetto alla base $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$
(le colonne sono lunghe m)

$$f(e_1) = C_1, \dots, f(e_n) = C_n$$

$$f: V \rightarrow W$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
 $\dim n \quad \dim m$

Dato un generico $x \in V$, scrivo $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ e ho

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) \\ &= x_1 C_1 + \dots + x_n C_n \end{aligned}$$

Quindi $f(x)$ è comb. lineare di $C_1, \dots, C_n$ con gli stessi coeff. con cui x è comb. lin. di $e_1, \dots, e_n$.

Prodotto di matrici = composizione di funzioni lineari

$$f: V \rightarrow W \quad g: W \rightarrow U \quad \text{appl. lineari}$$

$$g \circ f: V \rightarrow U \quad \text{funzione composta}$$

$$g(f(v))$$

$\downarrow$
occhio all'ordine

Se A rappresenta f e B rappresenta g , allora BA rappresenta $g \circ f$.

Il prodotto di matrici è definito in modo da rispettare la composizione. Nota: righe $A = \dim W$
colonne $B = \dim V$

Proprietà del prodotto

Se le dimensioni sono compatibili

- $A(BC) = (AB)C$ proprietà associativa che autorizza a scrivere ABC senza parentesi.
- $A(B+C) = AB + AC$
 $(A+B)C = AC + BC$
- $A(\lambda B) = \lambda AB$ $\lambda \in \mathbb{K}$
- $(AB)^t = B^t A^t$ (dimostrare per esercizio a partire dalla formula per il prodotto)

Proprietà falsa In generale NON è vero che $AB = BA$.

In generale se esiste AB non è detto che esista BA .

Ma anche se A e B sono matrici $n \times n$ quadrate, dunque AB e BA esistono, non è detto che siano uguali.

- $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Supposto che le inverse esistano

$$[\text{Verifica : } (AB)(B^{-1}A^{-1}) = \underbrace{A \underbrace{BB^{-1}}_{\text{associativa}}} A^{-1} = \underbrace{A \cdot I \cdot A^{-1}}_A = A \cdot A^{-1} = I]$$

$$\text{Analogamente : } (B^{-1}A^{-1}) \cdot (AB) = B^{-1} \underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_I \cdot B = B^{-1} \cdot B = I$$

Cambi di base

$$f : V \rightarrow V$$

A matrice associata nella base $\{e_1, \dots, e_n\}$ in partenza ed arrivo.

Se cambio base $\{e_1, \dots, e_n\}$ la nuova matrice diventa

$$B = M A M^{-1}$$

Non posso semplificare M e M^{-1} perché non sono a contatto !!!