

Sia X uno spazio vettoriale, e siano V e W due sottospazi.

Domande:

- ① $V \cap W$ è ancora un sottospazio? **SI**
- ② $V \cup W$ è ancora un sottospazio? **NO**

Dim. ① • Siano u_1, u_2 in $V \cap W$. È ancora vero che $u_1 + u_2 \in V \cap W$?

$$\left. \begin{array}{l} u_1 \in V \text{ e } u_2 \in V \Rightarrow u_1 + u_2 \in V \text{ perchè } V \text{ s.sp.} \\ u_1 \in W \text{ e } u_2 \in W \Rightarrow u_1 + u_2 \in W \text{ perchè } W \text{ s.sp.} \end{array} \right\} \Rightarrow u_1 + u_2 \in V \cap W$$

• Siano $v \in V \cap W$ e $a \in K$. È ancora vero che $av \in V \cap W$?

$$\left. \begin{array}{l} v \in V, a \in K \Rightarrow av \in V \text{ perchè } V \text{ s.sp.} \\ v \in W, a \in K \Rightarrow av \in W \text{ perchè } W \text{ s.sp.} \end{array} \right\} \Rightarrow av \in V \cap W.$$

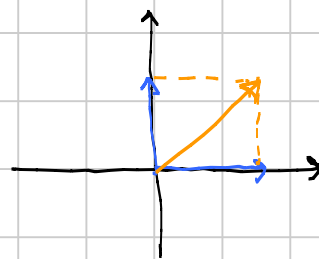
Per vedere che in generale $V \cup W$ NON è un sottospazio basta fare un esempio.

$X = \mathbb{R}^2$, $V = \text{asse } x$, $W = \text{asse } y$

$V \cup W$ è l'unione dell'asse x e

dell'asse y e non è un s.spazio perchè

non è chiuso rispetto alla somma



Sottospazio SOMMA

Si indica con $V+W$ l'insieme di tutti gli el. di X che sono somma di un elemento di V ed un elemento di W .

$$V+W = \{v+w : v \in V, w \in W\} \subseteq X$$

Fatto semplice

$V+W$ è un sottospazio vettoriale di X

Dim. Siano $u_1 + w_1 \in V + W$ e $u_2 + w_2 \in V + W$. Allora

$$u_1 + w_1 + u_2 + w_2 = \underbrace{(u_1 + u_2)}_V + \underbrace{(w_1 + w_2)}_W \in V + W$$

Sia $u + w \in V + W$ e sia $a \in K$. Allora

$$a(u + w) = \underbrace{au}_V + \underbrace{aw}_W \in V + W$$

— o — o —

Teorema (FORMULA DI GRASSMANN) X sp. vett., V e W s.sp.
 Allora

$$\dim(V + W) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W$$

Dim. Sia $k = \dim(V \cap W)$

Sia $m = \dim V$

Sia $n = \dim W$

Sia $\{u_1, \dots, u_k\}$ una base di $V \cap W$
 stanno sia in V sia in W

Posso completarla ad una base $u_1, \dots, u_k, \underbrace{u_{k+1}, \dots, u_m}_{\text{elementi aggiunti}}$ di V

Posso completarla ad una base $u_1, \dots, u_k, \underbrace{w_{k+1}, \dots, w_n}_{\text{elementi aggiunti}}$ di W

Dico che $u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_m, w_{k+1}, \dots, w_n$ sono una base di $V + W$. Quanti sono gli elementi? $\underbrace{m}_{\text{"i v"}} + \underbrace{n-k}_{\text{"i w"}}$

Se dimostro che sono una base ho finito.

La parte semplice è che generano. Infatti

$$\underbrace{v}_V + \underbrace{w}_W = (a_1 u_1 + \dots + a_m u_m) + (b_1 u_1 + \dots + b_k u_k + b_{k+1} w_{k+1} + \dots + b_n w_n)$$

quindi ogni elemento di $V + W$ è comb. lineare dei $u_1, \dots, u_m$ e $w_{k+1}, \dots, w_n$

Vediamo che sono lin. indep.

Prendo una qualunque loro comb. lineare che sia nulla:

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_m v_m + b_{k+1} w_{k+1} + \dots + b_n w_n = 0$$

Voglio dim. che tutti i coeff. sono nulli. Porto i w a dx:

$$\underbrace{a_1 v_1 + \dots + a_m v_m}_{\in V} = \underbrace{-b_{k+1} w_{k+1} - \dots - b_n w_n}_{\in W} \quad (\square)$$

Ma allora stanno entrambi in $V \cap W$, quindi sono entrambi comb. lineare di $v_1, \dots, v_k$. In particolare

$$-b_{k+1} w_{k+1} - \dots - b_n w_n = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$$

Portando tutto dalla stessa parte, otteniamo una comb. lineare di $v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_n$ che fa 0. Ma questi vettori sono una base di W , quindi tutti i coeff. devono essere nulli, quindi in particolare tutti i b_i devono essere nulli.

Tornando a $(\square)$ sappiamo ora che

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0,$$

ma essendo $v_1, \dots, v_m$ una base di V i coeff. devono essere tutti nulli, quindi anche gli a_i sono nulli.

_ o _ o _

Conseguenza. ① Se $V \cap W = \{0\}$, allora $\dim(V \cap W) = 0$, quindi

$$\dim(V + W) = \dim V + \dim W$$

In questo caso si dice che la somma è diretta e si scrive

$$V \oplus W$$

Esempio Prendiamo 2 sottospazi di dimensione 3 in $\mathbb{R}^5$. Allora la loro intersezione ha dimensione ≥ 1 .

Infatti $\dim(V+W) + \dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W)$
 $\leq 5 \quad \quad \quad \downarrow$
 $\quad \quad \quad \text{è almeno } 1$

Prendiamo in $\mathbb{R}^3$ 2 piani passanti per l'origine (s.sp. vett. di dim 2). Allora l'intersezione ha dim ≥ 1

$$\dim(V+W) + \dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W)$$



 si realizzano solo
 se i piani coincidono

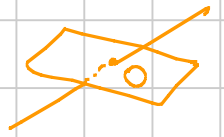
Esempio In $\mathbb{R}^3$ prendiamo una retta per l'origine ed un piano ^{per l'origine}

$$\dim(V+W) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W$$

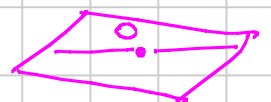
$3+0$: caso in cui l'intersezione è solo l'origine

In tal caso $\dim(V+W) = 3$, quindi

$V+W = \mathbb{R}^3$, cioè ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ è somma di un vettore di V e di un vettore di W .



2+1: caso in cui l'intersezione ha $\dim=1$, cioè la retta è contenuta nel piano, quindi l'intersezione è la retta stessa. La somma $V+W$ ha $\dim. 2$ ed è il piano stesso.



Fatto generale

Se $V \cap W = \{0\}$, cioè c'è somma diretta, allora ogni elemento $x \in V \oplus W$ si scrive in MODO UNICO come somma $v + w$ con $v \in V$ e $w \in W$.

Dim. Supponiamo che $x = v_1 + w_1 = v_2 + w_2$. Allora

$$\underbrace{v_1 - v_2}_{\in V} = \underbrace{w_2 - w_1}_{\in W}$$

Ma allora $v_1 - v_2$ e $w_2 - w_1 \in V \cap W$, ma allora sono nulli,

$$\text{cioè } v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$$

$$w_2 - w_1 = 0 \Rightarrow w_1 = w_2.$$

— 0 — 0 —

Notazione In caso di somma diretta v e w si chiamano le componenti di x rispetto a V e W .