

ALGEBRA LINEARE — LEZIONE 21

Titolo nota

30/10/2013

SISTEMI LINEARI

$$Ax = b$$

A matrice $m \times n$: m equazioni (righe) in n incognite

x vettore colonna delle incognite (n)

b vettore colonna dei termini noti (m)

Possibili interpretazioni Siano $C_1, \dots, C_n$ le colonne della matrice A .

① Posso pensare il sistema come

$$x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_n C_n = b$$

cioè come un tentativo di scrivere b come comb. lineare di $C_1, \dots, C_n$
(in questo contesto gli x_i sono i coefficienti della combinazione)

② Posso pensare alla matrice A come una applicazione lineare
 $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e risolvere il sistema lineare significa trovare
tutti i vettori $x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $L_A(x) = b$ (cioè tutti i vettori in
partenza da $\mathbb{R}^n$ a finire in b).

Domande : ① Esiste una soluzione ?

② Se sì, come sono fatte tutte le soluzioni ?
— o — o —

Risposta alla domanda ①

Un sistema lineare ha soluzione se e solo se b è combinazione
lineare delle colonne $C_1, \dots, C_n$, cioè se e solo se
 $b \in \text{Span}\{C_1, \dots, C_n\}$ (Punto di vista con le comb. lineari)

Equivalentemente, un sistema lineare ha soluzione se e solo se
 $b \in \text{Im}(L_A)$ (Punto di vista con le applicazioni lineari)

Caso speciale Se $b=0$, cioè se il sistema è omogeneo, allora di sicuro c'è almeno una soluzione, quella banale con $x=0$

Risposta domanda ② Struttura delle soluzioni di un sistema lineare.

Caso del sistema omogeneo, $Ax = 0$

L'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale (volendo è il $\ker$ di L_A).

- Dim. 1
- Se x_1 e x_2 sono soluzioni, allora $A(x_1+x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0$ quindi x_1+x_2 è soluzione
 - Se x è soluzione e $a \in K$, allora $A(ax) = aAx = a \cdot 0 = 0$ quindi ax è soluzione

Una volta che so che l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale, so che tutti i suoi elementi si scrivono come comb. lineare degli elementi di una base. Detta $\{v_1, \dots, v_k\}$ con $k = \dim$ una base, tutte le soluzioni si scriveranno come

$$x = c_1 v_1 + \dots + c_k v_k$$

dove $c_1, \dots, c_k$ sono "parametri liberi" ai quali posso assegnare il valore che voglio.

Caso del sistema non omogeneo $Ax = b$

Supponiamo che esistano soluzioni. Supponiamo che x_1 e x_2 siano due soluzioni

(È vero che x_1+x_2 è ancora soluzione? No! $A(x_1+x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 2b$ e $2b \neq b$ se $b \neq 0$)

Però $x_1 - x_2$ è una soluzione del sistema OMogeneo corrispondente
↑
stessa matrice A ,
solo termini costanti = 0.

$$A(x_1 - x_2) = Ax_1 - Ax_2 = b - b = 0$$

Fatto generale Sia x_0 una soluzione qualunque del sistema non omogeneo, cioè $Ax_0 = b$.

Allora l'insieme di TUTTE le soluzioni del sistema non omogeneo si ottiene sommando a x_0 una qualunque soluzione del sistema omogeneo corrispondente.

Quindi la formula generale è del tipo

$$x = \underbrace{C_1 v_1 + \dots + C_k v_k}_{\text{soluzione generale del sistema omogeneo}} + \underbrace{x_0}_{\text{soluzione qualunque del sistema non omogeneo}}$$

Conseguenza pratica Se io conosco una soluzione x_0 di un sistema non omogeneo, allora lo conosco tutte.

Dim. fatto generale Sia x_0 la soluzione speciale, sia x_1 un'altra soluzione. Allora $x_1 - x_0$ è soluzione dell'omog.:
 $A(x_1 - x_0) = Ax_1 - Ax_0 = b - b = 0$,
quindi $x_1 - x_0 = C_1 v_1 + \dots + C_k v_k$, quindi
 $x_1 = C_1 v_1 + \dots + C_k v_k + x_0$

Viceversa: Se prendo una soluzione x_0 del non omogeneo e aggiungo una soluzione v dell'omogeneo ottengo una soluzione del non omogeneo.

$$A(x_0 + v) = Ax_0 + Av = b + 0 = b$$

— 0 — 0 —

Caso particolare Cosa succede se $C_1, \dots, C_n$ sono linearmente indipendenti?

- ① Se il sistema è omogeneo, allora la soluzione banale $x=0$ è l'unica possibile. Se ci fosse un'altra soluzione, avrei una combinazione lineare di $C_1, \dots, C_n$ che fa 0 senza che tutti i coeff. siano nulli.
- ② Se il sistema è non omogeneo, allora la soluzione 0 non esiste, oppure se esiste è unica. La differenza risolverebbe l'omog.

Caso ultra-particolare

Cosa succede se il sistema è $n \times n$ (quadrato) e $C_1, \dots, C_n$ sono lin. indep.?

Ora le colonne sono n vettori $C_1, \dots, C_n$ di $\mathbb{R}^m$ e sono lin. indip., quindi sono una base ed in particolare generano, quindi ogni vettore b è loro combinazione lineare, quindi la soluzione c'è sempre ed è unica.

Quindi soluzione unica qualunque sia il termine noto b .

Altra interpretazione: $\dim \ker + \dim \operatorname{Im} = \dim$ $\begin{matrix} n \\ \circ \\ n \end{matrix}$ $\begin{matrix} n \\ n \end{matrix}$

$\Rightarrow \dim I_m = n = \dim \text{arrivo}$,
quindi tutto lo spazio di arrivo è nell'immagine.

FREGATURA : per calcolare uno span o stabilire la linea indipendente bisogna risolvere un sistema lineare!