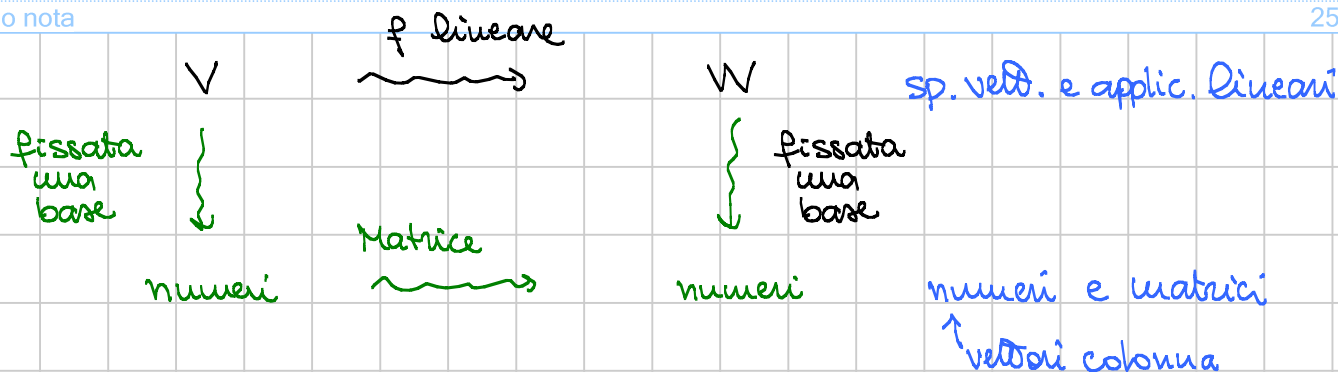


ALGEBRA LINEARE - LEZIONE 20

Titolo nota

25/10/2013



Domanda: se ho le componenti di un vettore v rispetto ad una certa base, come trovo le componenti di v rispetto ad un'altra base.

Altra domanda: ho una applicazione, scelgo 2 basi e ottengo una certa matrice. Se cambio le basi, come cambia la matrice.

Esempio pratico: consideriamo la base di $\mathbb{R}^3$ data da $(1, 1, 1)$, $(2, 1, 3)$, $(0, -1, 2)$.

Quali sono le componenti di $(5, 6, 7)$ o in generale di (a, b, c) rispetto a questa nuova base?

Quindi, con pazienza, risolvere:

$$x(1, 1, 1) + y(2, 1, 3) + z(0, -1, 2) = (a, b, c)$$

cioè:

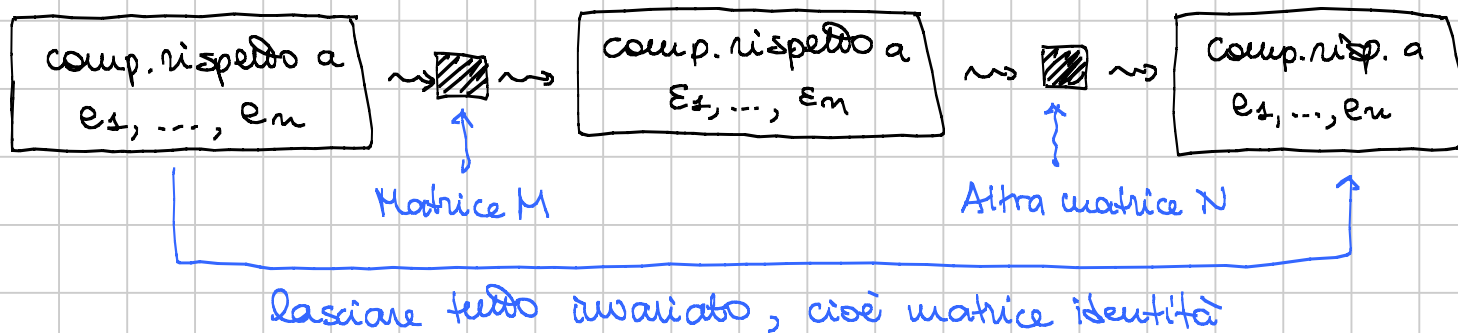
$$\begin{cases} x + 2y = a \\ x + y - z = b \\ x + 3y + 2z = c \end{cases}$$

1ª osservazione Mi basta trovare le componenti di $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ rispetto alla nuova base. Trovate queste, quelle del vettore generico (a, b, c) si trova per linearità: $a \cdot \text{comp di } (1, 0, 0) + b \cdot \text{comp di } (0, 1, 0) + c \cdot \text{comp di } (0, 0, 1)$.

In altre parole, il cambio di componenti è dettato da una MATRICE 3×3 , detta MATRICE di CAMBIO di BASE.

Supponiamo, in uno spazio V , di avere 2 basi:

$e_1, \dots, e_n$ e $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$.



Matrice identità: matrice $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

Perché si chiama matrice identità?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Tutti i vettori vengono lasciati inalterati

$x = \text{comp. risp. } e_1, \dots, e_n$

$\downarrow$

$Mx = \text{comp. risp. } \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$

$\downarrow$

$NMx = \text{comp. risp. } e_1, \dots, e_n = x$

Quindi $NM = I$, cioè $N = M^{-1}$, cioè N = inversa della matrice M .

Def. Data una matrice $M \in M_{n \times n}$ ^{quadrata}, si definisce matrice inversa la matrice N tale che

$$NM = MN = I_n$$

Come si trova la matrice inversa?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

M di cui
voglio fare
l'inversa

Identità

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Id

M^{-1}

Verifica

$$\begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

M^{-1}

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

M

↑
finire il conto

(stessa cosa a fattori invertiti)

Data la base $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ $(1,1,1), (2,1,3), (0,-1,2)$, che cosa rappresenta M , cioè la matrice che ha come colonne "i vettori" della base?

Rappresenta il cambio da base $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ a base canonica

Infatti $M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1^a \text{ colonna} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \epsilon_1$

sono le componenti
risp. alla base canonica
del vettore che ha
componenti $(1,0,0)$
risp. ad $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$.

$$M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2^a \text{ colonna} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \epsilon_2$$

$$M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3^a \text{ colonna} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \epsilon_3$$

Quindi se ho le componenti rispetto alla base canonica e voglio le componenti rispetto alla base $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ devo usare M^{-1} .

le componenti di $(5,6,7)$ rispetto alla base $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$ sono

$$M^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Supponiamo di avere 2 basi strane $\{v_1, \dots, v_m\} = \mathcal{B}$
 $\{\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m\} = \hat{\mathcal{B}}$
 oltre alla base canonica $\{e_1, \dots, e_n\}$

Se conosco le componenti rispetto a $\mathcal{B}$, come ottengo le componenti rispetto a $\hat{\mathcal{B}}$?

Esempio $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (2, 1, 3), (0, -1, 2)\}$
 $\hat{\mathcal{B}} = \{(2, 0, 1), (1, 3, 3), (2, 1, 4)\}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

M	INPUT: comp. $\mathcal{B}$	OUTPUT: comp. canonica
N	" " $\hat{\mathcal{B}}$	" " "

$N^{-1}M$ INPUT: componenti $\mathcal{B}$
 OUTPUT: comp. $\hat{\mathcal{B}}$