

Ker e immagine di una applicazione lineare

Sia $f: V \rightarrow W$ una applic. lineare (V e W sono sp. vett.)

Si dice $\text{Ker}(f)$ o nucleo di f l'insieme

$$\text{Ker}(f) = \{ v \in V : f(v) = 0 \} \subseteq V$$

$\uparrow$
0 di W

Si dice immagine di f l'insieme

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \{ f(v) : v \in V \} \subseteq W \\ &= \{ w \in W : \exists v \in V \text{ per cui } w = f(v) \} \end{aligned}$$

Proposizione $\text{Ker}(f)$ è un sottospazio vettoriale di V ,
 $\text{Im}(f)$ " " " " " W .

Dim. Caso del $\text{Ker}(f)$

Se $v_1 \in \text{Ker}$ e $v_2 \in \text{Ker}$, allora $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0 + 0 = 0$
 $\Rightarrow v_1 + v_2 \in \text{Ker}$

$\uparrow$
linearità

$\uparrow$
 $v_1 \in \text{Ker}$
 $v_2 \in \text{Ker}$

Se $v \in \text{Ker}$ e $a \in K$, allora $f(av) = a f(v) = a \cdot 0 = 0$
 $\Rightarrow av \in \text{Ker}$

$\uparrow$
linearità

$\uparrow$
 $v \in \text{Ker}$

Caso dell'immagine $\text{Im}(f)$

Se $w_1 \in \text{Im}(f)$ e $w_2 \in \text{Im}(f)$, allora esistono $v_1 \in V$ e $v_2 \in V$ t.c.
 $w_1 = f(v_1)$ e $w_2 = f(v_2)$. Ma allora

$$w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2) \Rightarrow w_1 + w_2 \in \text{Im}(f)$$

Se $w \in \text{Im}(f)$ e $a \in K$, allora esiste $v \in V$ t.c. $f(v) = w$, ma allora
 $aw = a f(v) = f(av) \Rightarrow aw \in \text{Im}(f)$.

Teorema (Dimensione di $\ker$ e Immagine)

Sia $f: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare.

Supponiamo che V abbia dimensione finita.

Allora

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim V$$

Dim. Sia $n = \dim V$, sia $k = \dim \ker$ (ovviamente $k \leq n$)

Sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ una base di $\ker f$.

Allora $v_1, \dots, v_k$ sono lin. indep. in V .

Per un teorema precedente posso aggiungere $n-k$ elementi in modo da ottenere una base di V . Siano $v_{k+1}, \dots, v_n$ questi aggiunti.

Dico che $\underbrace{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)}_{n-k \text{ elem. di } W}$ sono una base di $\operatorname{Im}(f)$.

Se lo dimostro ho finito.

Devo fare 2 verifiche

- ① Verifico che generano tutta l'immagine: prendo $w \in \operatorname{Im}(f)$, per definizione $\exists v \in V$ t.c., $w = f(v)$. Scrivo v come comb. lin. di $\{v_1, \dots, v_n\}$: $v = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n$

Ma allora

$$w = f(v) = f(\dots) = a_1 \underbrace{f(v_1)}_0 + \dots + a_k \underbrace{f(v_k)}_0 + a_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + a_n f(v_n)$$

perché $v_1, \dots, v_k \in \ker$

Quindi w è comb. lineare di $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$

- ② Verifico che $f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)$ sono lin. indep.

Considero una loro comb. lin. che sia nulla

$$a_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + a_n f(v_n) = 0$$

$$\hookrightarrow f(\underbrace{a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n}_{\in \ker f}) = 0$$

$\in \ker f$, quindi è comb. lineare di $v_1, \dots, v_k$, cioè

$$a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n = b_1 v_1 + \dots + b_k v_k, \text{ ma allora}$$

$$-b_1 v_1 - \dots - b_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n = 0, \text{ ma (essendo i } v_i \text{ tutti lin. indep.) deve per forza essere } \underline{b_1 = \dots = b_k = 0} = a_{k+1} = \dots = a_n.$$

Conseguenze del teorema

- ① Se $\dim(W) > \dim(V)$, allora f NON è surgettiva, cioè $\text{Im}(f)$ NON può essere uguale a tutto W .

Dim.

$$\dim \ker + \dim \text{Im} = \dim V, \text{ quindi per forza } \dim \text{Im} \leq \dim V$$

- ② Se $\dim(W) < \dim(V)$, allora f NON è iniettiva

Lemma $f: V \rightarrow W$ è iniettiva se e solo $\text{Ker}(f) = \{0\}$

Dim. lemma

Supponiamo che $\text{ker}(f)$ non sia solo $\{0\}$. Allora $\exists v \neq 0$ t.c. $v \in \text{ker}(f)$. Ma allora

$$f(v) = f(0) = 0$$

Questo dice che non è iniettiva (v e 0 , diversi in partenza, vanno a finire nello stesso elemento).

Supponiamo che $\text{ker}(f)$ sia solo $\{0\}$. Supponiamo che $f(v_1) = f(v_2)$.

Ma allora $f(v_1) - f(v_2) = 0$, cioè

$$f(v_1 - v_2) = 0, \text{ cioè } v_1 - v_2 \in \text{ker } f, \text{ ma se } \text{ker } f = \{0\}$$

vuol dire che $v_1 - v_2 = 0$, cioè $v_1 = v_2$, e questo dice che f è iniettiva.

— 0 — 0 —

Dim. di ②

$$\dim \ker + \dim \text{Im} = \dim V$$

In particolare

$$\dim \ker = \dim V - \dim \text{Im} \geq \dim V - \dim W > 0$$

↳ che
 $\dim \text{Im} \leq \dim W$

Quindi $\dim \text{ker}(f) > 0$, quindi $\text{ker}(f) \neq \{0\}$.

③ Supponiamo che $\dim V = \dim W$.

Allora f è cuiettiva $\Leftrightarrow f$ è surgettiva.

Dir.

$$\boxed{\text{Dim.}} \quad \dim \ker + \dim \text{Im} = \dim V \quad (= \dim W)$$

→ Se è iniettiva, allora $\dim \ker = 0$, ma allora $\dim \operatorname{Im} = \dim W$
ma allora $\operatorname{Im} f = W$, cioè f surgettiva. $\overset{!}{=} \dim V$

→ Se è surgettiva, allora $\dim \operatorname{Im} f = \dim W$, ma allora $\dim \ker = 0$, ma allora $\ker = \{0\}$, quindi f è iniettiva.

Back to linear systems Scriviamo un sistema nella forma

$$A \times U \cong$$

Pensiamo alla matrice A come un'applicazione lineare. Pensiamo che il sistema sia omogeneo, cioè $b=0$. Allora le soluzioni del sistema sono il $\ker$ dell'applicazione.

Se il sistema è non omogeneo, allora ha soluzioni se e solo se $b \in \text{Im}$.

In tal caso la soluzione è unica se e solo se l'applicazione è iniettiva, il che accade se e solo se $\ker = \{0\}$.

Questione di ker ... e Im ...