

Idea importante 1 Mediante una base si può associare ad ogni elemento di uno spazio vettoriale una serie di numeri (le componenti del vett. rispetto alla base)

Idea importante 2 Data una appl. lin., e fissate basi in partenza ed arrivo, la matrice dell'applicazione manda le comp. in partenza nelle comp. in arrivo pensate come vettori colonna.

Esercizio Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita come

$$f(x, y) = (2x - 3y, x + y, -2y)$$

- (a) Verificare che è lineare
 - (b) Scrivere la matrice associata ad f con le basi canoniche
 - (c) Scrivere la matrice associata ad f usando come basi
- $$e_1 = (2, 1) \quad e_2 = (1, 1)$$
- $$\varepsilon_1 = (1, 1, 0) \quad \varepsilon_2 = (0, 1, 1) \quad \varepsilon_3 = (2, 1, 1)$$

(a) Devo verificare che $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1 \in \mathbb{R}^2 \quad \forall v_2 \in \mathbb{R}^2$

$$v_1 = (x_1, y_1) \quad v_2 = (x_2, y_2) \quad v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$f(v_1 + v_2) = f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (2(x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2), (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2), -2(y_1 + y_2))$$

$$f(v_1) = f(x_1, y_1) = (2x_1 - 3y_1, x_1 + y_1, -2y_1)$$

$$f(v_2) = f(x_2, y_2) = (2x_2 - 3y_2, x_2 + y_2, -2y_2)$$

Stesso conto per la verifica che $f(av) = a f(v)$.

$$(b) \quad f(1,0) = (2,1,0) = \boxed{2} \cdot (1,0,0) + \boxed{1} \cdot (0,1,0) + \boxed{0} \cdot (0,0,1)$$

$$f(0,1) = (-3,1,-2) = \boxed{-3} \cdot (1,0,0) + \boxed{1} \cdot (0,1,0) + \boxed{-2} \cdot (0,0,1)$$

A con le basi canoniche

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Riprova

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ x + y \\ -2y \end{pmatrix}$$

(c) Base in partenza: $\overset{e_1}{(2,1)}$, $\overset{e_2}{(1,1)}$

(sono una base perché sono 2 elementi e sono lin. indip. poiché non sono uno multiplo dell'altro).

Base in arrivo: $\overset{e_1}{(1,1,0)}$, $\overset{e_2}{(0,1,1)}$, $\overset{e_3}{(2,1,1)}$

(dovrei verificare che sono lin. indip.: dovrei far vedere che

$$x(1,1,0) + y(0,1,1) + z(2,1,1) = (0,0,0) \Leftrightarrow x=y=z$$

il che si riduce ad un sistema lineare)

$$f(e_1) = f(2,1) = (1,3,-2) = \boxed{x} \cdot e_1 + \boxed{y} \cdot e_2 + \boxed{z} \cdot e_3 \rightarrow \text{1ª colonna}$$

In generale, devo capire come un vettore (a,b,c) si scrive usando la base e_1, e_2, e_3 . Impongo

$$x \cdot (1,1,0) + y \cdot (0,1,1) + z \cdot (2,1,1) = (a,b,c)$$

$$\begin{cases} x + 2z = a \\ x + y + z = b \\ y + z = c \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2z = a \\ y - z = b - a \\ y + z = c \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2z = a \\ y - z = b - a \\ 2z = c - b + a \end{cases}$$

$$z = \frac{c-b+a}{2} \quad y = z + b - a = \frac{c-b+a}{2} + b - a = \frac{c+b-a}{2}$$

$$x = a - 2z = a - (c - b + a) = b - c \quad (x,y,z) = \left(b - c, \frac{c+b-a}{2}, \frac{c-b+a}{2} \right)$$

Le componenti di $(1, 3, -2)$ sono $(+5, 0, -2) \rightarrow 1^a \text{ colonna}$
 $\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a & b & c \end{matrix}$

Controllo: $(1, 3, -2) \stackrel{?}{=} +5\varepsilon_1 - 2\varepsilon_3$
 $= 5(1, 1, 0) - 2(2, 1, 1)$

$f(e_2) = f(1, 1) = (-1, 2, -2)$ ha comp. $(4, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$
 $\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a & b & c \end{matrix}$

Controllo: $(-1, 2, -2) \stackrel{?}{=} 4\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 - \frac{5}{2}\varepsilon_3$
 $= \boxed{4}(1, 1, 0) + \boxed{\frac{1}{2}}(0, 1, 1) - \boxed{\frac{5}{2}}(2, 1, 1) \quad \text{OK.}$

Quindi la matrice A con base e_1, e_2 in partenza e
base $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ in arrivo è

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

(b) calcolare l'immagine di $(5, 3)$ usando la nuova matrice.

Devo scrivere $(5, 3)$ usando la base e_1, e_2

$(5, 3) = \boxed{2} \cdot (2, 1) + \boxed{1} \cdot (1, 1)$ (per trovare le componenti 2 e 1 avrei dovuto risolvere un sist. lin.)

Moltiplico la matrice per il vettore colonna $(2, 1)$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ \frac{1}{2} \\ -4 - \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{13}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \text{componenti di } f(5, 3) \text{ rispetto alla base } \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$$

Quindi $f(5, 3) = 14\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 - \frac{13}{2}\varepsilon_3$

$$= 14(1, 1, 0) + \frac{1}{2}(0, 1, 1) - \frac{13}{2}(2, 1, 1) = (1, 8, -6)$$

Problema classico: ho le componenti di un vettore rispetto ad una base e voglio le componenti dello stesso vettore rispetto ad un'altra base.

Ci piacerebbe

comp. risp. 1^a base $\rightsquigarrow$ BLACK
BOX $\rightsquigarrow$ comp. risp. 2^a base

La black box è usare un'opportuna matrice che ha come colonne

j -esima colonna: le componenti del j -esimo vettore della prima base rispetto alla seconda base.

— 0 — 0 —