

Esercizio Se $f: V \rightarrow W$ è lineare, allora $f(0) = 0$.
 $\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ 0 \text{ di } V & 0 \text{ di } W \end{matrix}$

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

Esercizio Come sono fatte tutte le applicazioni lineari $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

INPUT: vettore (x, y, z) OUTPUT: vettore con 2 componenti

Una volta stabilito dove finisce una base di $\mathbb{R}^3$, ad esempio la solita $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ ho finito. Pongo quindi
 $\begin{matrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{matrix}$

$$f(1, 0, 0) = f(e_1) = (a, b)$$

$$f(0, 1, 0) = f(e_2) = (c, d)$$

$$f(0, 0, 1) = f(e_3) = (e, f)$$

Ma allora per forza

$$f(x, y, z) = f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3)$$

$$= x(a, b) + y(c, d) + z(e, f)$$

$$= (ax + cy + ez, bx + dy + fz)$$

dove a, b, c, d, e, f sono numeri dati.

Interpretazione del risultato

$$\begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy + ez \\ bx + dy + fz \end{pmatrix}$$

$$2 \times 3$$

$$3 \times 1$$

$$2 \times 1$$

In generale: sia V uno spazio vettoriale di dimensione n , e sia $e_1, \dots, e_n$ una sua qualunque base;
 sia W uno spazio vettoriale di dimensione m , e sia $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$ una qualunque base di W ;
 sia $f: V \rightarrow W$ un'applicazione lineare,

Considero $f(e_1) \in W$. Lo scrivo come combinazione lineare di $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$:

$$f(e_1) = a_{1,1} \varepsilon_1 + a_{2,1} \varepsilon_2 + \dots + a_{m,1} \varepsilon_m$$

Analogamente scrivo più in generale

$$f(e_k) = a_{1,k} \varepsilon_1 + a_{2,k} \varepsilon_2 + \dots + a_{m,k} \varepsilon_m.$$

Considero la matrice $m \times n$ che ha come elementi gli $a_{i,j}$.

In particolare:

→ la 1ª colonna sono le componenti di $f(e_1)$ rispetto ad $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$

→ la 2ª colonna " " " " $f(e_2)$ rispetto ad " "

...

→ la n -esima colonna " " " " $f(e_n)$ rispetto ad $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$.

Detta A tale matrice, si dice che A rappresenta la funzione f tra V con base $e_1, \dots, e_n$ e W con base $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$.

Proprietà fondamentale. Se prendo un qualunque $v \in V$, e scrivo le sue componenti rispetto alla base $e_1, \dots, e_n$, cioè

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

Allora $f(v) = y_1 \varepsilon_1 + \dots + y_m \varepsilon_m$, e

$$A \cdot x = y$$

matrice che rappresenta f vettore colonna con componenti $x_1, \dots, x_n$ vettore colonna con componenti $y_1, \dots, y_m$.

Esempio

$$V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$$

$$W = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$$

$$f: V \rightarrow W$$

derivata

Base di V : $x^3, x^2, x, 1$
 $e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4$

Base di W : $x^2, x, 1$
 $\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3$

$$f(e_1) = 3x^2 = 3\varepsilon_1 = 3 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3 \rightarrow 1^a \text{ colonna}$$

$$f(e_2) = 2x = 2\varepsilon_2 = 0 \cdot \varepsilon_1 + 2 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3 \rightarrow 2^a \text{ colonna}$$

$$f(e_3) = 1 = \varepsilon_3 = 0 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 + 1 \cdot \varepsilon_3$$

$$f(e_4) = 0 = 0 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3$$

Matrice A :
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ 2b \\ c \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ componenti di un vettore in partenza
 $\leftarrow$ componenti di un vettore in arrivo.

$ax^3 + bx^2 + cx + d \in V$ la sua derivata è $3ax^2 + 2bx + c$
 $a e_1 + b e_2 + c e_3 + d e_4 \quad 3a \cdot \varepsilon_1 + 2b \cdot \varepsilon_2 + c \cdot \varepsilon_3$

Costruita la matrice A , se la moltiplico per le componenti di un certo v rispetto alla base $e_1, \dots, e_n$, ottengo le componenti di $f(v)$ rispetto alla base $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$

— $\circ$ — $\circ$ —

Succo della costruzione: gli elementi v dello spazio di partenza li posso pensare, dopo averli scritti nella base $e_1, \dots, e_n$, come vettori colonna. Stessa cosa posso fare in arrivo. La matrice A prende il vettore colonna di un certo $v \in V$ e restituisce il vettore colonna di $f(v) \in W$.

— $\circ$ — $\circ$ —

Esempio 2 $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$

$W = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$

Base di V : $x^3, x^2, x, 1$
 e_1, e_2, e_3, e_4

Base di W : $x^3, x^2, x, 1$
 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$

$f(p(x)) \rightarrow p(x+1)$

Input: polinomio $p(x) \in V$

Output: polinomio $p(x+1) \in W$
confermato dopo video

$f(e_1) = f(x^3) = (x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 1 \cdot \varepsilon_1 + 3 \cdot \varepsilon_2 + 3 \cdot \varepsilon_3 + 1 \cdot \varepsilon_4$

$f(e_2) = f(x^2) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = 0 \cdot \varepsilon_1 + 1 \cdot \varepsilon_2 + 2 \cdot \varepsilon_3 + 1 \cdot \varepsilon_4$

$f(e_3) = f(x) = x + 1 = 0 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 + 1 \cdot \varepsilon_3 + 1 \cdot \varepsilon_4$

$f(e_4) = f(1) = 1 = 0 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 + 0 \cdot \varepsilon_3 + 1 \cdot \varepsilon_4$

Matrice A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilità: se ora voglio calcolare f (polinomio qualunque) =

$f(ax^3 + bx^2 + cx + d) =$

$f(ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4)$

Quindi (a, b, c, d) sono le componenti di un generico $v \in V$.

Se moltiplico A per il vettore colonna con a, b, c, d ottengo un vettore colonna che rappresenta $f(v)$ nella base $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 3a+b \\ 3a+2b+c \\ a+b+c+d \end{pmatrix}$$

$f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$

$= a(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + b(x^2 + 2x + 1) + c(x+1) + d$

$= a x^3 + (3a+b) x^2 + (3a+2b+c) x + (a+b+c+d)$

Oss. Non è vero che le applicazioni lineari sono matrici.
Detto meglio

→ data una $f : V \rightarrow W$ lineare

→ data una base di V

→ data una base di W

esiste un' unica matrice che rappresenta l'applicazione nel senso che prende in INPUT le componenti di $v \in V$ e restituisce le componenti di $f(v) \in W$ (le componenti sono pensate come vettori colonna).

Oss. Un sistema lineare si può pensare come applicazione lineare in cui le incognite sono le componenti di un vettore nello spazio di partenza, i termini noti le componenti di un vettore nello spazio di arrivo.