

APPLICAZIONI LINEARI

Def. Siano  $V$  e  $W$  due spazi vettoriali su un campo  $K$ .

Una funzione  $f: V \rightarrow W$  si dice lineare se soddisfa le seguenti 2 proprietà

$$\textcircled{1} \quad \underbrace{f(v_1 + v_2)}_{\text{somma in } V} = \underbrace{f(v_1) + f(v_2)}_{\text{somma in } W} \quad \forall v_1 \in V, \forall v_2 \in V$$

$$\textcircled{2} \quad f(av) = \underbrace{a f(v)}_{\substack{\text{prodotto tra } a \in K \\ \text{e } f(v) \in W}} \quad \forall v \in V, \forall a \in K$$

Esempio 1 Siano  $V = W = \mathbb{R} = K$ . Come sono fatte le funzioni  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  lineari?

Pongo  $\lambda = f(1)$ . Allora  $f(x) = f(x \cdot 1) = x f(1) = \lambda x$   
 $\uparrow$   
uso linearità  
 $\textcircled{2}$

Quindi le funzioni  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  lineari sono tutte e sole quelle il cui grafico è una retta passante per l'origine.

Esempio 2 La funzione  $f(x) = 2x + 3$ , vista come  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , non è lineare.

Basta osservare che  $f(2) = 7$ ,  $f(3) = 9$ , ma  
 $f(2+3) = f(5) = 13 \neq f(2) + f(3)$

Oss. i valori 2 e 3 li ho scelti a caso, perché per dimostrare che una funzione non è lineare basta trovare una violazione di  $\textcircled{1}$  o  $\textcircled{2}$ .

Esempio 3 Come sono fatte tutte le funzioni  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  lineari?

INPUT: coppia  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

OUTPUT: numero  $\in \mathbb{R}$

Pongo  $\lambda = f(1, 0)$  e  $\mu = f(0, 1)$ . Allora

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f((x, y)) = f(\underbrace{x(1, 0)}_{v_1} + \underbrace{y(0, 1)}_{v_2}) & f(v_1 + v_2) &= f(v_1) + f(v_2) \\ &= f(x(1, 0)) + f(y(0, 1)) \\ &= x f((1, 0)) + y f((0, 1)) \\ &= \lambda x + \mu y & (= \text{multiplo della 1ª coordinata} \\ & & \quad + \text{multiplo della 2ª coordinata}) \end{aligned}$$

Si verifica che  $f(x, y) = \lambda x + \mu y$  è lineare per ogni scelta delle costanti  $\lambda$  e  $\mu$ .

— o — o —

Esempio 4 Sia  $V = \mathbb{R}_{\leq 4}[x]$ . Sia  $f: V \rightarrow V$  la derivata, cioè  $f(p(x)) = p'(x)$ .

Dico che  $f$  è lineare.

Devo verificare: ①  $f(p_1 + p_2) = f(p_1) + f(p_2)$

$$\begin{aligned} \text{Ma } f(p_1 + p_2) &= (p_1 + p_2)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{derivata somma} = \\ \text{somma delle derivate}}}{=} p_1' + p_2' = f(p_1) + f(p_2) \end{aligned}$$

②  $f(ap_1) = af(p_1)$  per ogni  $a \in \mathbb{R}$ , per ogni  $p_1 \in V$

$$\begin{aligned} \text{Ma } f(ap_1) &= (ap_1)' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{derivata di cost. funz.} = \\ \text{cost. derivata funzione}}}{=} a p_1' = a f(p_1) \end{aligned}$$

Proposizione Le funzioni lineari mandano combinazioni lineari in combinazioni lineari.

Detto meglio: sia  $f: V \rightarrow W$  lineare. Siano  $v_1, \dots, v_m$  elementi di  $V$ , e siano  $a_1, \dots, a_m$  elementi di  $K$ .

Allora

$$f(a_1 v_1 + \dots + a_m v_m) = a_1 f(v_1) + \dots + a_m f(v_m)$$

Dim.  $f(a_1 v_1 + \dots + a_m v_m) \stackrel{①}{=} f(a_1 v_1) + \dots + f(a_m v_m) \stackrel{②}{=} a_1 f(v_1) + \dots + a_m f(v_m).$

Oss. Il fatto che  $f(\text{somma di } n \text{ vettori}) = \text{somma delle } n \text{ immagini}$  andrebbe giustificato per induzione.  
— o — o —

Teorema (Struttura delle applicazioni lineari)

Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita, e sia  $v_1, \dots, v_n$  una base di  $V$ .

Sia  $W$  un altro spazio vettoriale qualunque (anche di dim. non finita) e siano  $w_1, \dots, w_n$  (stesso  $n$ ) dei vettori qualunque di  $W$ .

Allora esiste un'unica applicazione lineare  $f: V \rightarrow W$  tale che

$$f(v_i) = w_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Dim. Come si definisce  $f(v)$  per un generico vettore  $v \in V$ ?

Scrivo  $v$  come combinazione lineare di  $v_1, \dots, v_n$ : posso farlo in modo unico perché  $v_1, \dots, v_n$  sono una base di  $V$ .

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n.$$

A questo punto posso

$$\begin{aligned} f(v) &= [f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n)] \\ &= a_1 w_1 + \dots + a_n w_n \end{aligned}$$

" $f(\text{comb. lin. dei } v_i) = \text{corrispondente comb. lin. dei } w_i$ "

Resta da verificare che  $f$  è lineare, cioè che soddisfa ① e ②.

Verifica di ②:  $f(av) \stackrel{?}{=} af(v)$

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

$$av = aa_1 v_1 + \dots + aa_n v_n$$

$$f(av) = aa_1 w_1 + \dots + aa_n w_n = a(a_1 w_1 + \dots + a_n w_n) = af(v)$$

Verifica di ①:  $f(v + \hat{v}) = f(v) + f(\hat{v}) \quad \forall v \in V, \forall \hat{v} \in V$

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

$$\hat{v} = \hat{a}_1 v_1 + \dots + \hat{a}_n v_n$$

$$v + \hat{v} = (a_1 + \hat{a}_1) v_1 + \dots + (a_n + \hat{a}_n) v_n$$

$$\begin{aligned} f(v + \hat{v}) &= (a_1 + \hat{a}_1) w_1 + \dots + (a_n + \hat{a}_n) w_n \\ &= a_1 w_1 + \dots + a_n w_n + \hat{a}_1 w_1 + \dots + \hat{a}_n w_n \\ &= f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) + f(\hat{a}_1 v_1 + \dots + \hat{a}_n v_n) \\ &= f(v) + f(\hat{v}). \end{aligned}$$

— o — o —

Conseguenza. Un'applicazione lineare è univocamente determinata dai valori che assume in una base di  $V$ : una volta che ho scelto dove finiscono  $v_1, \dots, v_n$  so dove finiscono tutti gli altri  $v \in V$ .

Gli elementi della base posso mandarli dove mi pare.

Back to esempio 3  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Una volta stabilito dove vanno  $\underbrace{(1,0)}_{v_1}$  e  $\underbrace{(0,1)}_{v_2}$  sono vincolato

$$\begin{aligned} f(1,0) = \lambda, \quad f(0,1) = \mu, \quad \text{allora} \quad f(x,y) &= f(xv_1 + yv_2) \\ &= x f(v_1) + y f(v_2) = \\ &= \lambda x + \mu y. \end{aligned}$$

— o — o —